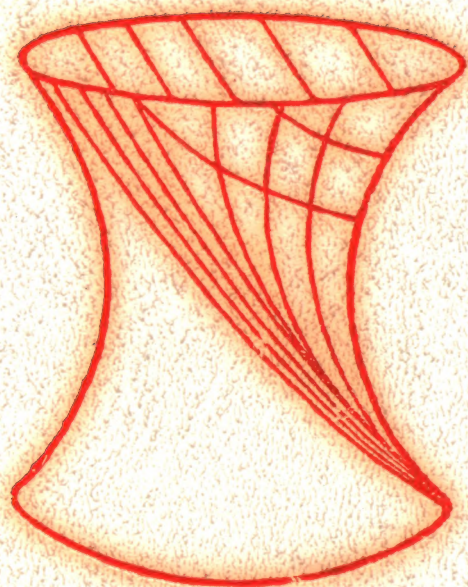


**Н. Биррелл
П. Девис**

**Квантованные
поля
в искривленном
пространстве-
времени**





QUANTUM FIELDS IN CURVED SPACE

N. D. Birrell

Consultant, Communications Group, Logica Ltd
and

P. C. W. Davies

Professor of Theoretical Physics,
University of Newcastle upon Tyne

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

Cambridge London New York New Rochelle Melbourne Sydney
1982

Н. БИРРЕЛЛ, П. ДЕВИС

КВАНТОВАННЫЕ ПОЛЯ В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ- ВРЕМЕНИ

Перевод с английского
д-ра физ.-мат. наук
Д. В. Гальцова

под редакцией
д-ра физ.-мат. наук
Я. А. Смородинского

МОСКВА «МИР» 1984

ББК 22.31
Б64
УДК 530.145

Биррелл Н., Девис П.

Б64 Квантованные поля в искривленном пространстве-времени. Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 356 с., ил.

Книга английских авторов посвящена систематическому изложению квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени, возникшей в результате объединения принципов квантовой теории полей и общей теории относительности. Большое внимание уделяется методам расчета перенормированных средних значений тензора энергии-импульса, построению эффективного лагранжиана гравитационного поля в однопетлевом приближении, а также приложениям теории к космологии и черным дырам. Сформулированы принципы построения теории взаимодействующих полей.

Книга рассчитана на специалистов в области теоретической физики, математиков, а также студентов старших курсов и аспирантов соответствующих специальностей. Она дает возможность читателю не только ознакомиться с уже имеющимися результатами в данной области, но и получить представление о еще не решенных проблемах и тенденциях этого бурно развивающегося направления теоретической физики.

Б $\frac{1704020000-128}{041(01)-84}$ 56-84, ч. 1

ББК 22.31
530.1

Редакция литературы по физике

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В ноябре 1915 г. Эйнштейн на четырех заседаниях Прусской Академии наук выступил с сообщением об уравнениях общей теории относительности (ОТО) и о наблюдаемых эффектах: движении перигелия Меркурия и отклонении луча света в поле массивного тела. С этих работ ведет свое начало классическая электродинамика в искривленном пространстве.

В течение многих лет эффекты ОТО рассматривались в связи с теорией классических полей. Возможность объединения ОТО и теории квантованных полей была лишь далекой целью. Для выполнения такой программы не только не было технических средств, но было даже не вполне ясно, в какой реальной области такая объединенная теория может оказаться полезной. И хотя в разных работах обсуждался эффект рождения пар в гравитационных полях, только замечательная работа Хокинга о спектре излучения черной дыры открыла путь в совершенно новую область квантовых эффектов, в формулы для которых входят одновременно и постоянная тяготения Эйнштейна и постоянная Планка. Неожиданным в этих формулах оказалось проявление статистических свойств в системах, описываемых уравнениями механики. Необходимость теории квантованных полей в искривленном пространстве стала очевидной. Само гравитационное поле также стало объектом квантования, правда только в том ограниченном числе случаев, когда квантовыми считаются лишь малые колебания метрики относительно более или менее гладкого метрического фона.

Книга английских физиков Биррелла и Девиса содержит результаты, полученные в этом направлении за последние десять лет. Хотя материал еще не принял форму последовательной теории, авторам удалось собрать практически все важные результаты в хорошо организованном обзоре, дополненном большим количеством ссылок на литературу¹⁾. Эта книга сейчас практически единственное введение в новую область теоретической

¹⁾ В нашем издании переводчик добавил список литературы, содержащий наиболее важные новые работы, появившиеся после выхода английского издания книги. Ссылки на эти работы даны цифрами со звездочками.

физики, доступную всем, кто знаком с обычной теорией релятивистских полей.

Следует помнить, конечно, что задача квантования произвольного гравитационного поля, когда квантовые флуктуации не малы, остается нерешенной. Этот вопрос, по-видимому, примыкает к более трудному вопросу о том, как в очень ранней вселенной возникла сама метрика. Последний вопрос тесно связан с двумя возможными взглядами на гравитацию: как на геометрический объект и как на релятивистское поле — систему квантов-гравитонов. По этому поводу пока не существует сколько-нибудь установившейся точки зрения. Наверно в теориях супергравитации ответ может стать более ясным. В рамках книги Биррелла и Девиса квантовая часть гравитации — это малая добавка к классическому полю. Сейчас закончился первый этап развития такой теории, и появление перевода данной книги на русский язык должно быть полезным для тех, кто начинает работать в этой почти фантастической области.

Я. Смородинский

ПРЕДИСЛОВИЕ

За последнее десятилетие квантовая теория поля в искривленном пространстве-времени приобрела важное значение как некоторое приближение к пока не существующей квантовой теории гравитации. В этой книге сделана попытка собрать воедино большое число работ, внесших вклад в быстрое развитие этой области исследований. Часть материала книги основана на исследованиях авторов, в особенности это касается моделей детекторов частиц и адиабатических состояний.

Изложение преследует как педагогические, так и историко-научные цели. Предварительное знакомство с предметом не предполагается, но желательно, чтобы читатель знал основы квантовой теории поля на уровне книги Бьеркена и Дрелла [49] и общую теорию относительности на уровне книг Вейнберга [494] или Мизнера, Торна и Уилера [363]. Теория формулируется, начиная с ее первооснов, многие детали собраны здесь вместе впервые. Обращаем внимание читателя на список обозначений и сокращений, а также на обширную библиографию.

При подготовке этой книги был использован материал работ большого числа авторов. В отдельных случаях мы внесли некоторые поправки (в том числе и в работы авторов данной книги), иногда не предупреждая читателя о тех отличиях, которые имеются в книге по сравнению с первоначальными публикациями.

Основная часть книги написана во время нашей совместной работы в отделе математики Королевского колледжа в Лондоне. Мы чувствуем себя в большом долгу перед нашими коллегами из этого и других научных центров за оказанную поддержку. Мы хотим выразить особую благодарность Т. С. Банчу, С. М. Кристенсену, Н. А. Дути, Дж. С. Даукеру, М. Дж. Даффу, Л. Х. Форду, С. А. Фуллинг, К. Дж. Айшему, Г. Кеннеди, Л. Паркеру и Р. М. Уолду за критические замечания по отдельным разделам рукописи.

Наконец, мы хотели бы поблагодарить г-жу Дж. Банн за перепечатку рукописи и Совет по научным исследованиям за финансовую помощь.

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

Обозначения величин, относящихся к квантовой теории поля, в основном соответствуют книге Бьеркена и Дрелла [49]. Выбор знаков у компонент метрики и тензора кривизны соответствует (— — —) в терминологии Мизнера, Торна и Уилера [363]. А именно, сигнатура метрики (+ — — —); $R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \dots$; $R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$. Переход от используемой здесь системы величин к часто применяемой системе (+++), принятой в книге [363], производится путем замены знаков у величин $g_{\mu\nu}$, $\square \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$, $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$, $R_{\mu\nu}$, $T_\mu{}^\nu$, в то время как величины $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $R_\mu{}^\nu$, R и $T_{\mu\nu}$ остаются неизменными. В большей части книги используется система единиц, в которой $\hbar = c = G = 1$.

Используются следующие специальные символы и сокращения:

| | |
|---|--|
| * | комплексное сопряжение |
| † | эрмитово сопряжение |
| — | дираково сопряжение |
| $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, ∂_μ или ∂_μ | частная производная |
| ∇_μ или ∂_μ | ковариантная производная |
| Re (Im) | вещественная (мнимая) часть |
| tr | след |
| ln | натуральный логарифм |
| k_B | постоянная Больцмана |
| γ | постоянная Эйлера |
| $[A, B]$ | $AB - BA$ |
| $\{A, B\}$ | $AB + BA$ |
| $a_{(\mu, \nu)}$ | $\frac{1}{2}(a_{\mu, \nu} + a_{\nu, \mu})$ |
| \simeq | приближенно равно |
| \sim | оценка по порядку величины |
| \approx | асимптотически приближается |
| \equiv | равно по определению |
| $::$ | нормальное упорядочение |

ВВЕДЕНИЕ

Последнее десятилетие ознаменовалось замечательными достижениями в построении объединенной теории фундаментальных сил природы. Электромагнитные и слабые взаимодействия были описаны единым образом теорией Вейнберга — Салама [493, 413], а так называемые теории великого объединения ([228], см. также обзор [120]), по-видимому, открывают путь к включению в более широкую калибровочную теорию и сильных взаимодействий, описываемых квантовой хромодинамикой.

В это последовательное объединение не входит гравитация. Тяготение не только оказывается в стороне от трех остальных сил природы, но и упорно не поддается попыткам истолкования с точки зрения квантовой теории. В течение последних сорока лет (см. обзоры [309, 310, 314]) с большой изобретательностью и настойчивостью предпринимались усилия в направлении квантования гравитации, но полностью удовлетворительной квантовой теории гравитации до сих пор не создано. По-видимому, наибольшие надежды в настоящее время возлагаются на теории супергравитации, в которых гравитон является лишь одной частицей более широкого мультиплета калибровочных частиц, включающего как бозоны, так и фермионы [148, 214] (см. также обзор [571*] и книги [475, 572*—575*]).

В отсутствие жизнеспособной квантовой теории гравитации можно ли вообще что-либо сказать о влиянии гравитационного поля на квантовые явления? В первые годы развития квантовой теории был предпринят ряд расчетов, в которых электромагнитное поле рассматривалось как классическое внешнее поле, взаимодействующее с квантованной материей. Такое полуклассическое приближение позволяет сразу получить некоторые результаты, находящиеся в полном согласии с точной квантовой электродинамикой (см., например, [418], гл. 11). Поэтому можно надеяться, что подобное соответствие имеет место и для тех квантовых аспектов гравитации, в которых гравитационное поле рассматривается как классический фон, в то время как материальные поля квантованы обычным образом. Принимая в качестве классической теории гравитации эйнштейновскую общую теорию относительности, приходим к квантовой теории поля

в искривленном фоновом пространстве-времени, которая и составляет содержание этой книги.

Как впервые показал Планк [399], из мировых постоянных G , \hbar и c можно составить комбинации, имеющие смысл новых фундаментальных единиц длины (планковская длина $(G\hbar/c^3)^{1/2} = 1,616 \cdot 10^{-33}$ см) и времени (планковское время $(G\hbar/c^5)^{1/2} = 5,39 \cdot 10^{-44}$ с). Если рассматривать гравитационное поле как малое возмущение и попытаться его квантовать, следуя образцу квантовой электродинамики (КЭД), то в роли константы взаимодействия будет выступать квадрат планковской длины. Но в отличие от КЭД, в которой константа связи $e^2/\hbar c$ безразмерна (и мала по сравнению с единицей), планковская длина имеет размерность. Если пространственные или временные масштабы интересующих нас квантовых процессов становятся меньше соответствующих планковских величин, то квантовые эффекты могут быть велики. В этом случае высшие порядки теории возмущений будут сравнимы с низшим порядком, и вся концепция разложения по малым возмущениям теряет смысл.

Таким образом, планковские величины обозначают границу, за которой должна привлекаться полная, по-видимому, непертурбативная по своему характеру квантовая теория гравитации. Тем не менее можно надеяться, что в случаях, когда расстояния и времена, характерные для рассматриваемых процессов, намного больше планковских величин, квантовые эффекты гравитационного поля будут пренебрежимо малыми. Поскольку планковская длина весьма мала (в десять в двадцатой степени раз меньше размера атомного ядра), очевидно, остается широкая область, в которой возможно применение полуклассической теории.

Но, продолжая рассуждать в том же духе, мы сталкиваемся со следующей проблемой. Согласно принципу эквивалентности, лежащему в самом основании метрических теорий гравитации, все виды материи и энергии в одинаковой степени подвержены тяготению. Сюда, конечно, следует включить и гравитационную энергию, иными словами, «гравитация гравитирует». В терминах квантовой теории можно сказать, что гравитационное поле действует на гравитон так же, как, скажем, на фотон. Следовательно, всякий раз, когда классическое гравитационное поле приводит к существенным эффектам, в которых участвуют (реальные или виртуальные) фотоны, необходимо учитывать также аналогичные процессы с участием гравитонов. Отсюда следует, что если возникают представляющие интерес квантовые эффекты, то квантовая гравитация должна проявиться нетривиальным образом *во всех масштабах* расстояний и времени. Таким образом, лежащая в основе гравитационного взаимодействия нелинейность срывает любые попытки пренебрежения квантовой гравитацией [186].

Несмотря на это затруднение, полуклассическое описание все же возможно. В классической общей теории относительности рассматривается распространение гравитационных волн на фоне искривленного пространства-времени. В основе такого рассмотрения лежат вакуумные уравнения Эйнштейна, но малое возмущение метрики $\bar{g}_{\mu\nu}$, вызываемое гравитационной волной, можно отделить от метрики $g^c_{\mu\nu}$ фонового пространства-времени:

$$g_{\mu\nu} = g^c_{\mu\nu} + \bar{g}_{\mu\nu}. \quad (1.1)$$

Тогда гравитационные волны можно рассматривать как изотропную жидкость, подобную любой другой жидкости, а их вклад в левую часть уравнений Эйнштейна преобразовать к виду, в котором его можно перенести в правую часть, интерпретируя как часть источника, т. е. часть $T_{\mu\nu}$.

В духе этих рассуждений кажется разумным предположить, что поле «гравитонов», соответствующее линейаризованным возмущениям фонового пространства-времени, можно трактовать наряду с другими квантованными полями как часть материи, а не как геометрию. Можно ожидать, что такая линейаризованная теория будет справедлива вдали от планковской области. Однако пока не создана законченная квантовая теория гравитации, вопрос о справедливости данного приближения остается открытым. (Спорным, конечно, остается и вопрос о том, можно ли называть «полуклассической» теорию, использующую представление о гравитонах.) Такой подход аналогичен рассмотрению испускания фотонов атомом, находящимся во внешнем электрическом или магнитном поле.

Де Витт [154, 155] использовал (1.1) в качестве отправной точки подхода к полному квантованию гравитации, получившего название метода фонового поля. В этом подходе $g^c_{\mu\nu}$ представляет собой классическую метрику некоторого фонового пространства-времени, а $\bar{g}_{\mu\nu}$ описывает квантованное поле, распространяющееся на этом фоне. Эйнштейновское действие и действия для материальных полей могут быть разложены по степеням $\bar{g}_{\mu\nu}$ относительно $g^c_{\mu\nu}$, что позволяет вывести соответствующие правила Фейнмана. Квантовые процессы низшего порядка — однопетлевые — изображаются фейнмановскими диаграммами, показанными на рис. 1. Волнистая линия представляет пропагатор поля $\bar{g}_{\mu\nu}$, распространяющегося на фоне $g^c_{\mu\nu}$, ровная линия — соответствующий пропагатор материального поля. Так как ни рис. 1, а, ни рис. 1, б не содержат гравитонных вершин, обе эти диаграммы определяют выражения, не зависящие от гравитационной постоянной G и, следовательно, сравнимые по величине. Таким образом, оказывается, что на однопетлевом уровне квантование гравитационного поля на фоне $g^c_{\mu\nu}$ столь же существенно, как и квантование полей материи.

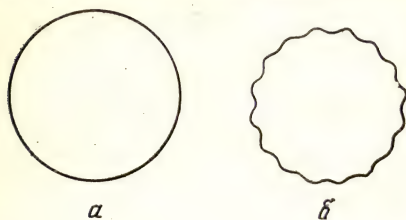


Рис. 1. Вклад низшего порядка (однопетлевой), даваемый в энергию вакуума материальными полями (а) и линеаризованными гравитонами (б), распространяющимися в заданном фоновом гравитационном поле.

С физической точки зрения изолированные замкнутые петли представляют бесконечную вакуумную, или нулевую, энергию, которая в случае плоского пространства-времени (т. е. в обычной квантовой теории поля) искусственно устраняется с помощью вычитаний или так называемого нормального упорядочения (см. разд. 2.4). Но, если фоновое пространство искривлено, необходима более тонкая процедура, учитывающая динамику гравитационного поля. Этот прием, называемый *перенормировкой*, известен из КЭД, где также возникают расходимости.

В этом последнем случае расходимости устраняются в результате перенормировки масс, зарядов и волновых функций частиц. Важно, что лишь конечное число величин подвергается перенормировке — особенность, которая придает КЭД статус перенормируемой теории. Перенормируемость КЭД критически связана с фактом безразмерности константы связи $e^2/\hbar c$. Напротив, G имеет размерность квадрата длины (в единицах, в которых $\hbar = c = 1$), что приводит, как видно из простого подсчета степеней, к бесконечной последовательности новых расходимостей в каждом порядке теории возмущений. Члены высших порядков в разложении гравитационного действия по степеням \bar{g} дают многопетлевые гравитационные фейнмановские диаграммы (рис. 2, а). Между степенью расходимости и числом петель в диаграмме существует простое соотношение (см., например, [184]), согласно которому увеличение числа петель сопровождается появлением все более опасных расходимостей. Это обстоятельство делает квантовую гравитацию неперенормируемой — в каждом следующем порядке теории возмущений нужно вводить новые величины, чтобы поглотить бесконечности. Именно по этой причине не было успешно выполнено квантование гравитационного поля.

Если в квантовой теории гравитации с учетом материи ограничиться некоторым заданным числом петель, то остается конечное число расходимостей, которые могут быть устранены перенормировкой конечного числа физических величин. Например, как мы увидим в гл. 6, чтобы сделать теорию конечной на однопетлевом уровне, достаточно перенормировать G , космологическую постоянную Λ и константы связи двух вновь вводимых тен-

зоров. Таким образом, в некотором смысле эта усеченная теория может рассматриваться как перенормируемая.

Следует отметить, что если пытаться квантовать гравитационное поле, используя разложение на фоне плоского пространства-времени, т. е. выбирая в (1.1) $g^c_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ (метрика пространства Минковского), то перенормировку нельзя выполнить общековариантным образом (см., например, [184]). По этой причине, а также в связи с другими трудностями такого подхода [118] целесообразно рассматривать поля, распространяющиеся на фоне пространства с произвольной метрикой $g^c_{\mu\nu}$.

В большей части этой книги мы рассматриваем квантовую теорию гравитации с учетом материи в однопетлевом приближении. Многопетлевые диаграммы для свободных материальных полей вообще отсутствуют, в рис. 1, *а* изображает точный вклад этих полей (в эффективное действие, вводимое в гл. 6). На рис. 1, *б* показан вклад гравитонов нулевого порядка по G . Поскольку разложение по числу петель есть разложение по \hbar [367], однопетлевая теория, совпадающая с точной теорией с учетом величин порядка \hbar , представляет собой первую квантовую поправку к общей теории относительности.

При включении в теорию самодействующих или взаимодействующих полей однопетлевые вклады материальных полей, изображенные на рис. 1, *а*, более не являются точными ввиду появления многопетлевых диаграмм, содержащих вершины (рис. 2, *б*). Так как в лабораторных экспериментах чаще всего наблюдаются именно эффекты взаимодействий между материальными полями («частицами»), такие многопетлевые диаграммы для материальных полей также должны быть включены в рассмотрение. Разумеется, если мы хотим сохранить все члены определенного порядка по \hbar , то следует включить и гравитационные диаграммы

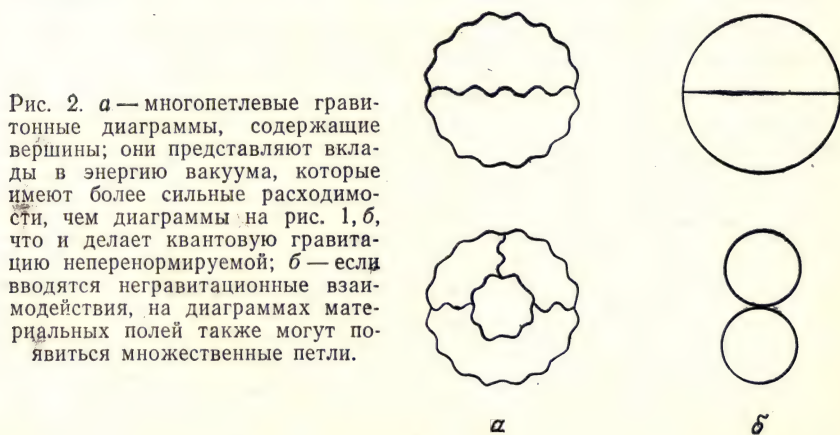


Рис. 2. *а* — многопетлевые гравитонные диаграммы, содержащие вершины; они представляют вклады в энергию вакуума, которые имеют более сильные расходимости, чем диаграммы на рис. 1, *б*, что и делает квантовую гравитацию неперенормируемой; *б* — если вводятся негравитационные взаимодействия, на диаграммах материальных полей также могут появиться множественные петли.

с произвольным числом петель, но при этом мы столкнемся с неперенормируемостью гравитации. Однако каждая дополнительная гравитационная петля в связной фейнмановской диаграмме вносит, вообще говоря, множитель G , в то время как соответствующая материальная петля дает множителем характерную константу связи (например, $e^2/\hbar c$). Если l — типичный пространственный или временной масштаб рассматриваемой системы, то при условии $l^{-2}G \ll e^2$ вклад дополнительных гравитонных петель будет пренебрежимо малым по сравнению с вкладом добавочных материальных петель. Таким образом, даже в случае взаимодействующих материальных полей использование однопетлевой квантовой теории гравитации оправданно в достаточно широкой области.

Допустим, что мы располагаем по крайней мере некоторым разумным приближением к теории, описывающей влияние тяготения на квантованные поля. Насколько существенными являются описываемые таким образом процессы? Грубо говоря, нетривиальные гравитационные эффекты должны проявляться для тех мод квантованного поля, длина волны которых сравнима с характерным масштабом изменения фонового пространства-времени. Так, вблизи черной дыры радиуса r моды с длиной волны больше r будут заметно искажаться дырой. Аналогично, если гравитационное поле изменяется за характерное время t , то полевые моды частоты $\leq t^{-1}$ будут испытывать значительное возмущение. Следовательно, если для пространственного и временного масштабов, характеризующих основные квантовые процессы, принять значения 10^{-13} см и 10^{-23} с, то мы приходим к выводу, что существенных квантовых эффектов можно ожидать лишь в окрестности микроскопических черных дыр или на самой ранней стадии расширения вселенной.

Таким образом, слабость гравитационного взаимодействия препятствует возможности изучения рассматриваемых эффектов в лабораторных условиях, и, если только микроскопические черные дыры не являются гораздо более многочисленными, чем следует из существующих оценок, прямая экспериментальная проверка теории совершенно исключена. Квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени, по-видимому, суждено покориться на чисто теоретических основаниях.

Ввиду ограниченных возможностей экспериментальной проверки особое значение приобретают результаты Хокинга [278]. Выполненное им исследование квантовых процессов в черных дырах и открытие их теплового излучения составляют краеугольный камень развиваемой в этой книге теории. Результат Хокинга привлекает к себе внимание по двум причинам. Во-первых, это фундаментальный физический результат, который может быть получен несколькими различными способами. Во-вторых, он

устанавливает тесную связь между физикой черных дыр и термодинамикой, о существовании которой строили догадки еще до попыток применения квантовой теории к черным дырам. Невольно напрашивается мысль, что эффект Хокинга лишь приоткрыл завесу над новой широкой областью фундаментальной физики, в которой тесно переплетены гравитация, квантовая теория поля и термодинамика. Если это так, то синтез этих теорий, несомненно, приведет к развитию новых физических представлений, некоторые из которых могут иметь экспериментально наблюдаемые следствия.

Эту ситуацию можно сравнить с ранним периодом развития кинетической теории. В середине девятнадцатого века атомная гипотеза фактически не могла быть прямо проверена экспериментально ввиду малости атомных эффектов. Тем не менее полностью разработанная теория приводила к следствиям, выходящим за рамки собственно атомной области, и предсказывала новые явления в динамике газов, которые могли быть проверены. Аналогично можно надеяться, что правильно сформулированная квантовая теория гравитации сможет проникнуть в другие, более доступные области физики.

Начало исследованию влияния гравитации на квантовые процессы было положено еще работой Шредингера [420]. После второй мировой войны интерес к квантованию гравитационного поля значительно возрос, но прямое изучение эффектов рождения частиц в классическом гравитационном поле началось с работы Паркера в конце 60-х годов, за которой последовали работы Зельдовича с сотрудниками. В этих первых работах рассматривались космологические следствия рождения частиц. Дальнейшее продвижение затруднялось отсутствием систематических методов изучения тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ гравитационно-возмущенных квантованных полей. Тензор энергии-импульса важен по двум причинам. Он может быть использован для оценки роли квантовых эффектов в динамике самого гравитационного поля (т. е. при решении проблемы обратного воздействия рождающихся частиц на метрику пространства-времени). Кроме того, тензор энергии-импульса часто более адекватно отражает физическую реальность, чем число частиц. В области сильного гравитационного поля эффекты поляризации вакуума, так же как в КЭД, могут быть существенными даже при отсутствии фактического рождения частиц.

В середине 70-х годов большие усилия были направлены на развитие строгих методов расчета $\langle T_{\mu\nu} \rangle$. Методы перенормировки для устранения формальных бесконечностей заимствовались как из обычной квантовой теории поля (в пространстве Минковского), так и из квантовой гравитации, наряду с чем были развиты и новые методы.

Важной особенностью этих методов является то, что они приводят к ковариантно сохраняющемуся (с равной нулю дивергенцией) $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, который благодаря этому является подходящим кандидатом для правой части полуклассических уравнений Эйнштейна. Может показаться, что в условиях рождения пар частиц из вакуума $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ не должен сохраняться. В самом деле, Хокинг [274] показал, что сохранение $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ при выполнении условия энергодоминантности (сводящегося в основном к требованиям положительности энергии и давления — см. [287]) несовместимо с рождением частиц. Выяснилось, однако, что нетривиальной особенностью квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени является возможность отрицательных значений энергии-импульса вакуума за счет кривизны пространства-времени и, следовательно, нарушения условия энергодоминантности в обход результата Хокинга [502]. Таким образом, рождение частиц не противоречит сохранению $\langle T_{\mu\nu} \rangle$. Возможность нарушения энергетических условий также открывает путь к построению моделей, в которых удастся избежать пространственно-временных сингулярностей (см. разд. 7.4).

После открытия Хокингом теплового излучения черных дыр и возникновения более совершенных методов расчета $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ квантовая теория поля в искривленном пространстве-времени, или однопетлевая квантовая гравитация, пережила период бурного развития, когда было опубликовано несколько сотен работ. Хотя выводы некоторых работ носили спорный характер (наиболее примечательными с физической точки зрения были дискуссии о частицах и $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, о роли пространственно-временных сингулярностей, о существовании так называемых конформных аномалий и о критериях для выяснения физического смысла тех или иных квантовых состояний), теперь имеется общее согласие между техническими результатами большей части расчетов. Интерпретация результатов в последующих главах неизбежно несет на себе отпечаток мнения авторов, но мы, насколько возможно, пытались придерживаться суждений, представляющих, как мы считаем, «точку зрения большинства». Мы старались избегать неясных утверждений о физической природе «частиц» и «энергии», везде, где это возможно, формулируя наши выводы в операционных терминах, т. е. описывая результаты, к которым пришел бы гипотетический наблюдатель, движущийся определенным образом и пользующийся определенным прибором.

Порядок изложения материала в книге традиционный. В гл. 2 дается обзор основных понятий обычной квантовой теории поля в пространстве Минковского и устанавливаются принятые нами обозначения. В гл. 3 эти понятия обобщаются на случай искривленного пространства-времени и вводится представление о рождении частиц гравитационными полями. Дается также наибо-

лее полное на настоящий момент описание адиабатических состояний и детекторов частиц. В гл. 4 и 5 на детально разработанных конкретных примерах излагаются применения теории к плоскому и искривленному пространству-времени.

В гл. 6, являющейся центральной частью книги, исчерпывающим образом рассматриваются методы регуляризации и перенормировок. Мы предприняли попытку не только обсудить все описанные в литературе методы перенормировок (с примерами), но и, насколько возможно, изложить их с единой точки зрения. Вооружившись этими результатами, читатель может приступить к изучению гл. 7, в которой описанные в предыдущей части книги методы применяются к ряду конкретных задач.

Развитые в предшествующих главах методы вычислений в полном объеме используются для детального обсуждения проблемы черных дыр, занимающего всю гл. 8. Недостаток места вынудил нас ограничиться лишь ссылками на литературу при обсуждении многих важных и завораживающих воображение физических следствий теории. В частности, нам не удалось ни достаточно подробно остановиться на термодинамических аспектах физики черных дыр, включая возможные обобщения на гравитационные поля более общего вида, ни детально коснуться таких вопросов, как временная асимметрия, циклы Пуанкаре, соотношение черные дыры — белые дыры, влияние квантовых эффектов на пространственно-временные сингулярности. Кроме того, опущено почти все, касающееся астрофизических и космологических следствий квантовых процессов в черных дырах.

В последней гл. 9 мы попытались выйти за рамки того, что можно назвать «первым кругом» результатов в области квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени. Здесь мы кратко описываем обобщение теории, необходимое для того, чтобы учесть негравитационные взаимодействия полей между собой. Особое внимание уделяется изучению влияния взаимодействия и самодействия полей на рождение частиц и поляризацию вакуума, а также обсуждению вопроса о том, остается ли теория, перенормируемая в пространстве Минковского, такая, как КЭД или теория $\lambda\phi^4$, перенормируемой при наличии нетривиальной топологии или пространственно-временной кривизны.

В книге такого рода неизбежны несколько размытые очертания. Данная область исследований продолжает быстро развиваться, и в ней еще много белых пятен, которые предстоит заполнить. Тем не менее последний год явился периодом осмысления и кристаллизации основных идей, что позволило нам дать здесь достаточно последовательное и полное изложение предмета.

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО

В этой главе мы даем резюме основных положений обычной квантовой теории поля в пространстве Минковского, с которой, как мы предполагаем, читатель знаком по опыту работы. Значительная часть этого формализма может быть перенесена на случай искривленного пространства-времени и нетривиальной топологии почти или вовсе без изменений. В последующих главах мы будем следовать данной здесь трактовке.

Большая часть подробных выкладок относится к скалярному полю, но приводятся также основные результаты для полей высших спинов. Это ограничение позволяет с минимальными математическими сложностями выявить существенные особенности квантовой теории поля в искривленном пространстве.

Многое из того, что изложено в этой главе, известно из таких учебников, как книга Бьеркена и Дрелла [49], но читателю следует обратить особое внимание на результаты, касающиеся вычисления среднего значения тензора энергии-импульса и расходимости энергии вакуума (разд. 2.4), которые будут играть в дальнейшем центральную роль. Особое значение также придается функциям Грина, подробно рассматриваемым в разд. 2.7. Читатель возможно не знаком с тепловыми функциями Грина и евклидизацией метрики. Поскольку это существенно для понимания квантовых черных дыр, мы коротко останавливаемся здесь на этих вопросах.

Наконец, хотя основная часть формализма развивается без помощи фейнмановского интегрирования по траекториям, мы используем представление о континуальном интеграле при обсуждении перенормировок в гл. 6, а также в гл. 9, посвященной взаимодействиющим полям в искривленном пространстве. Хотя от читателя не требуется основательного знакомства с формулировкой теории в терминах интегралов по траекториям, очерк основных положений этого подхода, данный в разд. 2.8, может оказаться полезным.

2.1. Скалярное поле

Рассмотрим скалярное поле $\phi(t, x)$, заданное во всех точках (t, x) n -мерного пространства-времени Минковского и удовлетворяющее волновому уравнению

$$(\square + m^2)\phi = 0, \tag{2.1}$$

где $\square \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$, $\eta^{\mu\nu}$ — метрический тензор Минковского. Величину m следует интерпретировать как массу полевого кванта во вторично-квантованном варианте теории. В дальнейшем точки пространства-времени $(t, \mathbf{x}) = (x^0, \mathbf{x})$ мы часто обозначаем кратко символом x .

Уравнение (2.1) можно получить из плотности лагранжиана

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} (\eta^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} - m^2 \phi^2), \quad (2.2)$$

если построить действие

$$S = \int \mathcal{L}(x) d^n x \quad (2.3)$$

и наложить требование, чтобы вариация по ϕ была равна нулю:

$$\delta S = 0. \quad (2.4)$$

Один из возможных наборов решений уравнения (2.1) имеет вид

$$u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) \sim e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \quad (2.5)$$

где

$$\omega \equiv (k^2 + m^2)^{1/2}, \quad k \equiv |\mathbf{k}| = \left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i^2 \right)^{1/2}, \quad (2.6), (2.7)$$

и декартовы компоненты вектора \mathbf{k} принимают значения $-\infty < k_i < \infty$, $i = 1, \dots, n-1$. Моды (2.5), являющиеся собственными функциями оператора $\partial/\partial t$, называются положительно-частотными по отношению к t :

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) = -i\omega u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}), \quad \omega > 0. \quad (2.8)$$

Определим скалярное произведение

$$\begin{aligned} (\phi_1, \phi_2) &= -i \int \{ \phi_1(x) \partial_t \phi_2^*(x) - [\partial_t \phi_1(x)] \phi_2^*(x) \} d^{n-1}x = \\ &= -i \int_t \phi_1(x) \overleftrightarrow{\partial}_t \phi_2^*(x) d^{n-1}x, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где t обозначает пространственноподобную гиперповерхность одновременных событий в момент времени t . По отношению к этому скалярному произведению функции (2.5) ортогональны:

$$(u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'}) = 0, \quad \mathbf{k} \neq \mathbf{k}'. \quad (2.10)$$

Если выбрать

$$u_{\mathbf{k}} = [2\omega (2\pi)^{n-1}]^{-1/2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t} \quad (2.11)$$

то функции $u_{\mathbf{k}}$ будут нормированы условием

$$(u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'}) = \delta^{n-1}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (2.12)$$

Для многих задач решения u_k удобнее ограничить внутренностью пространственноподобного $(n-1)$ -мерного тора со стороной L (т. е. выбрать периодические граничные условия). Тогда

$$u_k = (2L^{n-1}\omega)^{-1/2} e^{ik \cdot x - i\omega t}, \quad (2.13)$$

где

$$k_i = 2\pi j_i/L, \quad j_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Следовательно,

$$(u_k, u_{k'}) = \delta_{kk'}. \quad (2.14)$$

Для перехода от нормировки непрерывного спектра к дискретной нормировке в ящике следует заменить $\int d^{n-1}k$ на

$$(2\pi/L)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} \sum_{j_i} \equiv (2\pi/L)^{n-1} \sum_k.$$

2.2. Квантование

При каноническом квантовании системы поле ϕ следует рассматривать как оператор, удовлетворяющий следующим одновременным перестановочным соотношениям:

$$\begin{aligned} [\phi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{x}')] &= 0, \\ [\pi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{x}')] &= 0, \\ [\phi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{x}')] &= i\delta^{n-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \end{aligned} \quad (2.15)$$

где переменная π , канонически сопряженная ϕ , определяется выражением

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi)} = \partial_t \phi. \quad (2.16)$$

Полевые моды (2.11) или (2.13) и комплексно-сопряженные с ними образуют ортонормированный базис со скалярным произведением (2.9), поэтому поле ϕ может быть представлено в виде разложения

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \sum_k [a_k u_k(t, \mathbf{x}) + a_k^\dagger u_k^*(t, \mathbf{x})]. \quad (2.17)$$

Одновременные коммутационные соотношения для ϕ и π эквивалентны следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} [a_k, a_{k'}] &= 0, \\ [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] &= 0, \\ [a_k, a_{k'}^\dagger] &= \delta_{kk'}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

В представлении Гейзенберга квантовые состояния образуют гильбертово пространство. В этом гильбертовом пространстве удобно использовать фоковский базис. Нормированные базисные кет-векторы, обозначаемые символом $| \rangle$, могут быть построены, исходя из вакуумного состояния $|0\rangle$, физический смысл которого обсуждается ниже. Состояние $|0\rangle$ определяется тем, что оно обращается в нуль всеми операторами a_k :

$$a_k |0\rangle = 0, \quad \forall k. \quad (2.19)$$

Состояние, получающееся в результате действия на $|0\rangle$ оператора a_k^\dagger , называется одночастичным состоянием и обозначается $|1_k\rangle$:

$$|1_k\rangle = a_k^\dagger |0\rangle. \quad (2.20)$$

Подобным же образом можно построить многочастичные состояния

$$|1_{k_1}, 1_{k_2}, \dots, 1_{k_j}\rangle = a_{k_1}^\dagger a_{k_2}^\dagger \dots a_{k_j}^\dagger |0\rangle, \quad (2.21)$$

если все k_1, k_2, \dots, k_j различны. Если некоторые операторы a_k^\dagger повторяются, то

$$\begin{aligned} |^1 n_{k_1}, ^2 n_{k_2}, \dots, ^i n_{k_j}\rangle &= ({}^1 n! {}^2 n! \dots {}^i n!)^{-1/2} \times \\ &\times (a_{k_1}^\dagger)^{{}^1 n} (a_{k_2}^\dagger)^{{}^2 n} \dots (a_{k_j}^\dagger)^{{}^i n} |0\rangle, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где множители $n!$ необходимы для того, чтобы удовлетворить статистике Бозе для тождественных скалярных частиц. При этом

$$a_k^\dagger |n_k\rangle = (n+1)^{1/2} |(n+1)_k\rangle, \quad (2.23)$$

$$a_k |n_k\rangle = n^{1/2} |(n-1)_k\rangle. \quad (2.24)$$

Базисные векторы нормированы соотношением

$$\begin{aligned} \langle {}^1 n_{k_1}, {}^2 n_{k_2}, \dots, {}^r n_{k_r} | {}^1 m_{k'_1}, {}^2 m_{k'_2}, \dots, {}^s m_{k'_s} \rangle &= \\ &= \delta_{rs} \sum_{\alpha} \delta_{{}^1 n} {}^{\alpha(1)} m \dots \delta_{{}^r n} {}^{\alpha(s)} m \delta_{k_1 k'_{\alpha(1)}} \dots \delta_{k_r k'_{\alpha(s)}}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где суммирование ведется по всем перестановкам α индексов $1, \dots, s$.

2.3. Энергия и импульс

Для выяснения физического смысла фоковских состояний целесообразно рассмотреть оператор Гамильтона и оператор импульса поля. Эти величины можно построить с помощью тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}$. Тензор $T_{\mu\nu}$ может быть получен стандарт-

ным способом (см. (3.189)) в виде

$$T_{\alpha\beta} = \phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \eta^{\lambda\delta} \phi_{,\lambda}\phi_{,\delta} + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \eta_{\alpha\beta}, \quad (2.26)$$

откуда находим для плотности гамильтониана

$$T_{tt} = \frac{1}{2} \left[(\partial_t \phi)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (\partial_i \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right] \quad (2.27)$$

и для плотности импульса

$$T_{ti} = \partial_t \phi \partial_i \phi, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (2.28)$$

в координатах Минковского.

Подставляя ϕ из (2.17) в (2.27) и (2.28) и интегрируя по всему пространству, находим

$$H \equiv \int_t T_{tt} d^{n-1}x = \frac{1}{2} \sum_k (a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger) \omega, \quad (2.29)$$

$$P_i \equiv \int_t T_{ti} d^{n-1}x = \sum_k a_k^\dagger a_k k_i \quad (2.30)$$

для гамильтониана и операторов компонент импульса соответственно. С помощью коммутационных соотношений (2.18) выражение (2.29) может быть представлено в более наглядной форме

$$H = \sum_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right) \omega. \quad (2.31)$$

Ясно, что обе величины H и P_i коммутируют с операторами

$$\begin{aligned} N_k &\equiv a_k^\dagger a_k, \\ N &\equiv \sum_k N_k, \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$[N, H] = [N, P_i] = 0. \quad (2.33)$$

Смысл оператора N выявляется, если вычислить его среднее значение в фоковских состояниях. Из (2.19) и (2.24) получаем

$$\langle 0 | N_k | 0 \rangle = 0, \quad \forall k; \quad (2.34)$$

$$\langle {}^1 n_{k_1}, {}^2 n_{k_2}, \dots, {}^i n_{k_i} | N_{k_i} | {}^1 n_{k_1}, {}^2 n_{k_2}, \dots, {}^i n_{k_i} \rangle = {}^i n. \quad (2.35)$$

Таким образом, среднее значение оператора N_{k_i} есть целое число ${}^i n$, входящее в выражение для кет-вектора с индексом k_i . Просуммировав N_{k_i} в (2.35) по всем i , найдем

$$\langle |N| \rangle = \sum_i {}^i n. \quad (2.36)$$

Это простое соотношение между N_k и n позволяет назвать N_k оператором числа частиц моды k , а N — оператором полного числа частиц. В силу соотношений (2.33) собственные состояния N являются также собственными состояниями операторов H и P . При возрастании каждого из чисел 1n на единицу средние $\langle |H| \rangle$ и $\langle |P| \rangle$ возрастают на ω_i и k_i соответственно. Следовательно, мы можем интерпретировать 1n как *число квантов*, каждый из которых несет энергию ω_i и импульс k_i . Поэтому состояние $|{}^1n_{k_1}, {}^2n_{k_2}, \dots, {}^1n_{k_l}\rangle$ есть состояние, содержащее 1n квантов моды с импульсом k_1 , 2n квантов моды с импульсом k_2 и т. д.

Возвращаясь к соотношениям (2.23) и (2.24), можем дать физическую интерпретацию операторов a_k и a_k^\dagger . Первый из них уменьшает число квантов моды k на единицу, в то время как второй увеличивает это число на единицу. Поэтому a_k называют оператором уничтожения, а a_k^\dagger — оператором рождения квантов моды k .

2.4. Расходимость энергии вакуума

Особый интерес вызывает состояние $|0\rangle$. Это *вакуумное состояние*, не содержащее частиц. Оно имеет нулевой импульс

$$\langle 0 | P | 0 \rangle = 0, \quad (2.37)$$

что непосредственно следует из (2.30). Можно было бы ожидать, что оно несет и нулевую энергию, поскольку кванты поля отсутствуют. Но в выражении (2.31) имеется член $1/2 \sum_k \omega$, поэтому

$$\langle 0 | H | 0 \rangle = \langle 0 | 0 \rangle \sum_k \frac{1}{2} \omega = \sum_k \frac{1}{2} \omega, \quad (2.38)$$

где использовано условие нормировки $\langle 0 | 0 \rangle = 1$.

Правая часть (2.38) не только отлична от нуля; на самом деле она бесконечна:

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{1}{2} \omega &= \frac{1}{2} (L/2\pi)^{n-1} \int \omega d^{n-1}k = \\ &= (L^2/4\pi)^{(n-1)/2} \frac{1}{\Gamma((n-1)/2)} \int_0^\infty (k^2 + m^2)^{1/2} k^{n-2} dk, \end{aligned} \quad (2.39)$$

так как интеграл расходится как k^n при больших k . Эту расходимость удобно анализировать, выполнив интегрирование в (2.39) при n , не равном целому числу, что приводит к результату

$$-L^{n-1} 2^{-n-1} \pi^{-n/2} m^n \Gamma(-n/2),$$

Функция Γ имеет полюсы при всех четных целочисленных значениях $n \geq 0$. Такой метод временного превращения бесконечных величин в конечные путем продолжения размерности пространства-времени на нецелочисленные значения является основной размерной регуляризацией (см. гл. 6).

Может показаться, что бесконечность выражения (2.39) означает, что вакуум обладает бесконечной плотностью энергии. Это затруднение происходит из-за нулевой энергии гармонического осциллятора $1/2\omega$, ассоциируемого с каждой модой скалярного поля. Поскольку частота ω не ограничена сверху, нулевая энергия каждого осциллятора может быть произвольно большой. Это проблема, которая постоянно возникает в квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени. В плоском пространстве-времени она разрешается просто. Энергия, как таковая, в негравитационной физике неизмерима, и мы можем изменить — *перенормировать* — начало отсчета энергии даже на бесконечную величину, не изменяя значений наблюдаемых величин. Этого можно достичь отбрасыванием члена $1/2\sum_k \omega$ в (2.31) или, в более изящной форме, вводя операцию *нормального упорядочения* операторов, обозначаемую символом $::$, которая означает, что в любом произведении операторов рождения и уничтожения последние следует поставить справа от первых. Применительно к выражению (2.29) нормальное упорядочение подразумевает, что

$$:a_k a_k^\dagger := a_k^\dagger a_k, \quad (2.40)$$

откуда следует

$$:H := \sum_k a_k^\dagger a_k \omega, \quad (2.41)$$

и вызывающий трудности член $1/2\omega$ исчезает.

Наконец, вернемся к тензору $T_{\mu\nu}$ и выражению (2.26). Используя разложение (2.17) для ϕ по модам u_k , имеем

$$\phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} = \sum_k \sum_{k'} (a_k \partial_\alpha u_k + a_k^\dagger \partial_\alpha u_k^*) (a_{k'} \partial_\beta u_{k'} + a_{k'}^\dagger \partial_\beta u_{k'}^*).$$

Из (2.19) и соответствующего условия

$$\langle 0 | a_k^\dagger = 0 \quad (2.42)$$

с учетом соотношения

$$\langle 0 | a_k a_{k'}^\dagger | 0 \rangle = \delta_{kk'}$$

получаем

$$\langle 0 | \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} | 0 \rangle = \sum_k u_{k,\alpha} u_{k,\beta}^*.$$

В общем случае

$$\langle 0 | T_{\alpha\beta} | 0 \rangle = \sum_k T_{\alpha\beta} [u_k, u_k^*], \quad (2.43)$$

где $T_{\alpha\beta}[\phi, \phi]$ обозначает билинейную форму (2.26) для $T_{\alpha\beta}$. Аналогично

$$\langle {}^1n_{k_1}, {}^2n_{k_2}, \dots | T_{\alpha\beta} | {}^1n_{k_1}, {}^2n_{k_2}, \dots \rangle = \sum_k T_{\alpha\beta} [u_k, u_k^*] + 2 \sum_i {}^i n T_{\alpha\beta} [u_{k_i}, u_{k_i}^*]. \quad (2.44)$$

2.5. Дираковское спинорное поле

До сих пор мы ограничивались скалярным полем (со спином, равным нулю). Квантование полей высших спинов проводится аналогично. В частности, фермионное поле ψ спина 1/2 имеет функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} i (\bar{\psi} \gamma^\alpha \psi_{,\alpha} - \bar{\psi}_{,\alpha} \gamma^\alpha \psi) - m \bar{\psi} \psi, \quad (2.45)$$

где ψ — спинор, дираковски сопряженный к ψ (т. е. $\psi^\dagger \gamma^0$), и матрицы Дирака γ^μ удовлетворяют антикоммутационным соотношениям

$$\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2\eta^{\alpha\beta}. \quad (2.46)$$

(Свойства γ -матриц в пространстве n измерений см., например, в работе [141].)

Варьирование действия $S = \int \mathcal{L} d^n x$ по $\bar{\psi}$ приводит к уравнению Дирака

$$i\gamma^\alpha \psi_{,\alpha} - m\psi = 0, \quad (2.47)$$

описывающему частицу с массой m . Поле ψ имеет спинорный индекс (ψ^a), который в приведенных формулах опущен. Подобным же образом мы опускаем индексы матриц Дирака (γ_{ab}).

Полный набор решений уравнения Дирака в дискретной нормировке дается формулами

$$\begin{aligned} u_{k,s}(t, \mathbf{x}) &= N u(\mathbf{k}, s) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \\ v_{k,s}(t, \mathbf{x}) &= N v(\mathbf{k}, s) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + i\omega t}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

где

$$N = \begin{cases} (m/\omega L^{n-1})^{1/2}, & m \neq 0, \\ (2\omega L^{n-1})^{-1/2}, & m = 0. \end{cases} \quad (2.49)$$

Известные постоянные спиноры с положительной и отрицательной энергией $u(\mathbf{k}, s)$, $v(\mathbf{k}, s)$ (см., например, [49], гл. 3 и 10) существуют для двух независимых спиновых состояний и нормированы согласно равенствам

$$u^\dagger(\mathbf{k}, s) u(\mathbf{k}, s') = v^\dagger(\mathbf{k}, s) v(\mathbf{k}, s') = \begin{cases} (\omega/m) \delta_{ss'}, & m \neq 0, \\ 2\omega \delta_{ss'}, & m = 0. \end{cases} \quad (2.50)$$

Мы можем поэтому разложить поле ψ следующим образом:

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \sum_{\pm s} \sum_{\mathbf{k}} [b_{\mathbf{k}}(s) u_{\mathbf{k},s}(t, \mathbf{x}) + d_{\mathbf{k}}^{\dagger}(s) v_{\mathbf{k},s}(t, \mathbf{x})] \quad (2.51)$$

и нормировать в соответствии со скалярным произведением

$$(\psi, \phi) = \int d^{n-1}x \bar{\psi}(t, \mathbf{x}) \gamma_0 \phi(t, \mathbf{x}). \quad (2.52)$$

Все операторы $b_{\mathbf{k}}(s)$, $d_{\mathbf{k}}(s)$, $b_{\mathbf{k}}^{\dagger}(s)$, $d_{\mathbf{k}}^{\dagger}(s)$ антикоммутируют, за исключением

$$\{b_{\mathbf{k}}(s), b_{\mathbf{k}'}^{\dagger}(s')\} = \{d_{\mathbf{k}}(s), d_{\mathbf{k}'}^{\dagger}(s')\} = \delta_{ss'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (2.53)$$

Построив гамильтониан, а также операторы импульса и углового момента и вычислив их математические ожидания в фоковских состояниях, найдем, что $b_{\mathbf{k}}^{\dagger}(s)$ есть оператор рождения кванта с импульсом \mathbf{k} , энергией ω и спином s , в то время как $d_{\mathbf{k}}^{\dagger}(s)$ уничтожает квант моды с импульсом $(-\mathbf{k})$, энергией $(-\omega)$ и спином s . Физически операторы $b_{\mathbf{k}}^{\dagger}(s)$ и $d_{\mathbf{k}}^{\dagger}(s)$ представляют собой операторы рождения для электрона и позитрона соответственно, а $b_{\mathbf{k}}(s)$ и $d_{\mathbf{k}}(s)$ — соответствующие операторы уничтожения.

Более подробное исследование тензора энергии-импульса для поля Дирака мы откладываем до изложения теории в искривленном пространстве-времени в разд. 3.8.

2.6. Электромагнитное поле

Электромагнитное (безмассовое со спином 1) поле описывается плотностью лагранжиана

$$L = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (2.54)$$

где

$$F_{\alpha\beta} = A_{\alpha,\beta} - A_{\beta,\alpha} \quad (2.55)$$

— максвелловский тензор поля. Варьирование действия $S = \int \mathcal{L} d^n x$ дает

$$F^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0, \quad (2.56)$$

что вместе с тождеством

$$F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0 \quad (2.57)$$

составляет уравнения Максвелла.

Тензор поля (2.55) и, следовательно, лагранжиан (2.54) инвариантны относительно локальных калибровочных преобразований

$$A_\alpha \rightarrow A_\alpha^\Lambda = A_\alpha + \partial_\alpha \Lambda(x), \quad (2.58)$$

где $\Lambda(x)$ — произвольная дифференцируемая скалярная функция. Калибровочная инвариантность препятствует возможности прямого квантования теории, и ее следует нарушить, что обычно достигается добавлением к лагранжиану слагаемого, фиксирующего калибровку:

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{2} \xi^{-1} (A^\alpha_{,\alpha})^2, \quad (2.59)$$

где ξ — параметр, определяющий выбор калибровки; $\xi = 1$ соответствует калибровке Фейнмана, $\xi \rightarrow 0$ — калибровке Ландау.

Введение члена, нарушающего калибровку, приводит к уравнениям поля

$$[\eta_{\alpha\beta} \square - (1 - \xi^{-1}) \partial_\alpha \partial_\beta] A^\beta = 0. \quad (2.60)$$

В фейнмановской калибровке эти уравнения сводятся к уравнению

$$\square A_\alpha = 0, \quad (2.61)$$

решения которого имеют вид

$$A^\alpha(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} [a_{\mathbf{k}\lambda} u_{\mathbf{k}\lambda}^\alpha(t, \mathbf{x}) + a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger u_{\mathbf{k}\lambda}^{\alpha*}(t, \mathbf{x})], \quad (2.62)$$

где плосковолновые моды $u_{\mathbf{k}\lambda}^\alpha$ определяются выражением

$$u_{\mathbf{k}\lambda}^\alpha(t, \mathbf{x}) = (2L^{n-1}\omega)^{-1/2} e_{\mathbf{k}\lambda}^\alpha e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t}, \quad (2.63)$$

а векторы поляризации $e_{\mathbf{k}\lambda}^\alpha$, $\lambda = 1, 2, 3, 4$, задают независимые состояния поляризации моды \mathbf{k} . Эти векторы можно выбрать так, что они образуют ортонормированную систему

$$\eta_{\alpha\beta} e_{\mathbf{k}\lambda}^\alpha e_{\mathbf{k}\lambda'}^\beta = \eta_{\lambda\lambda'}. \quad (2.64)$$

Квантование поля проводится в основном так же, как квантование скалярного поля, но поскольку физический фотон имеет только две независимые (поперечные) степени свободы, а при сделанном выше выборе лоренц-ковариантной калибровки все четыре компонента потенциала A^α равноправны, получаемые таким путем результаты не сразу приобретают физический смысл. Для физической интерпретации квантованной теории можно использовать формализм Гупты — Блейлера ([52, 258], см. также учебники [56, 318, 423]). Мы не будем привлекать здесь этот

формализм, а проведем квантование электромагнитного поля методом интегрирования по траекториям, при котором появляется новая особенность — так называемые дѹховые поля, что важно при построении теории в искривленном пространстве-времени. Но прежде следует ввести аппарат функций Грина.

2.7. Функции Грина

Вакуумные математические ожидания различных произведений операторов свободного поля могут быть отождествлены с различными функциями Грина волнового уравнения. Сначала мы рассмотрим случай скалярного поля, где особое значение имеют математические ожидания коммутатора и антикоммутатора полей, обозначаемые соответственно как

$$iG(x, x') = \langle 0 | [\phi(x), \phi(x')] | 0 \rangle, \quad (2.65)$$

$$G^{(1)}(x, x') = \langle 0 | \{\phi(x), \phi(x')\} | 0 \rangle. \quad (2.66)$$

Функция G известна как функция Паули — Йордана или Швингера, а $G^{(1)}$ иногда называют элементарной функцией Адамара. Эти функции Грина могут быть разбиты на положительно- и отрицательно-частотные части:

$$\begin{aligned} iG(x, x') &= G^+(x, x') - G^-(x, x'), \\ G^{(1)}(x, x') &= G^+(x, x') + G^-(x, x'), \end{aligned} \quad (2.67)$$

где функции Вайтмана G^\pm имеют вид

$$\begin{aligned} G^+(x, x') &= \langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle, \\ G^-(x, x') &= \langle 0 | \phi(x') \phi(x) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Фейнмановский пропагатор G_F определяется как хронологически упорядоченное произведение полей

$$\begin{aligned} iG_F(x, x') &= \langle 0 | T(\phi(x) \phi(x')) | 0 \rangle = \\ &= \theta(t - t') G^+(x, x') + \theta(t' - t) G^-(x, x'), \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Наконец, запаздывающая и опережающая функции Грина определяются соответственно как

$$\begin{aligned} G_R(x, x') &= -\theta(t - t') G(x, x'), \\ G_A(x, x') &= \theta(t' - t) G(x, x'), \end{aligned} \quad (2.70)$$

а их полусумма, обозначаемая

$$\bar{G}(x, x') = \frac{1}{2} [G_R(x, x') + G_A(x, x')], \quad (2.71)$$

связана с G_F соотношением

$$G_F(x, x') = -\bar{G}(x, x') - \frac{1}{2} iG^{(1)}(x, x'). \quad (2.72)$$

Из уравнений поля (2.1) ясно, что G , $G^{(1)}$, G^\pm удовлетворяют однородному уравнению

$$(\square_x + m^2)\mathcal{G}(x, x') = 0 \quad (2.73)$$

С другой стороны, используя соотношение $\partial_t \theta(t - t') = \delta(t - t')$ и одновременные коммутаторы (2.15), получаем следующие уравнения для G_F , G_R и G_A :

$$(\square_x + m^2)G_F(x, x') = -\delta^n(x - x'), \quad (2.74)$$

$$(\square_x + m^2)G_{R, A}(x, x') = \delta^n(x - x'). \quad (2.75)$$

Функции Грина G_F, R, A описывают распространение возмущений поля при различных граничных условиях.

Интегральные представления для функций Грина можно получить, подставляя разложение по модам (2.17) для ϕ в определения функций Грина как вакуумных ожиданий. Получим, что все функции Грина могут быть представлены в виде

$$\mathcal{G}(x, x') = (2\pi)^{-n} \int \frac{\exp[ik \cdot (x - x') - ik^0(t - t')]}{(k^0)^2 - |\mathbf{k}|^2 - m^2} d^n k. \quad (2.76)$$

Интеграл имеет полюсы при $k^0 = \pm(|\mathbf{k}|^2 + m^2)^{1/2}$. Рассматривая интегрирование по k^0 как контурное интегрирование в комплексной плоскости, можно выполнить его, деформируя контур вблизи полюсов. Характер этой деформации (рис. 3) зависит от налагаемых на поле граничных условий и определяет, какая из различных функций Грина будет получена с помощью (2.76).

Например, контур интегрирования, соответствующий G_F , приводит к выражению

$$G_F(x, x') = \frac{-i\pi}{(4\pi i)^{n/2}} \left(\frac{2m^2}{-\sigma + i\varepsilon} \right)^{(n-2)/4} H_{1/2n-1}^{(2)} \{ [2m^2(\sigma - i\varepsilon)]^{1/2} \}, \quad (2.77)$$

где $\sigma = \frac{1}{2}(x - x')^2 = \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}(x^\alpha - x'^\alpha)(x^\beta - x'^\beta)$, а $H^{(2)}$ — функция Ханкеля второго рода. Добавка $-i\varepsilon$ к σ показывает, что G_F фактически представляет собой граничное значение функции, аналитической в нижней полуплоскости σ .

В безмассовом пределе функции Грина обычно обозначаются символом D вместо G . В этом пределе фейнмановский пропагатор для четырехмерного случая приводится к виду

$$D_F(x, x') = (i/8\pi^2\sigma) - (1/8\pi)\delta(\sigma), \quad (2.78)$$

а элементарная функция Адамара равна

$$D^{(1)}(x, x') = -1/4\pi^2\sigma. \quad (2.79)$$

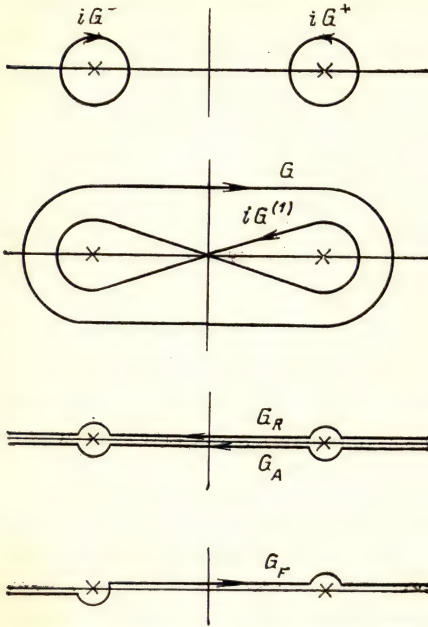


Рис. 3. Контуры в комплексной плоскости переменной k^0 , которым отвечают различные функции Грина. Полюса на вещественной оси $k^0 = \pm(|\mathbf{k}|^2 + m^2)^{1/2}$ отмечены крестиками. Открытые контуры могут рассматриваться как замкнутые бесконечно удаленными полуокружностями в верхней или нижней полуплоскости.

Для полей со спином $1/2$ и 1 мы приведем здесь лишь некоторые функции Грина. Для дираковского спинорного поля вводятся функции

$$iS_F(x, x') = \langle 0 | T(\psi(x) \bar{\psi}(x')) | 0 \rangle, \quad (2.80)$$

$$S^{(1)}(x, x') = \langle 0 | [\psi(x), \bar{\psi}(x')] | 0 \rangle, \quad (2.81)$$

удовлетворяющие уравнениям

$$(i\gamma^a \partial_a - m) S_F(x, x') = \delta^n(x - x'), \quad (2.82)$$

$$(i\gamma^a \partial_a - m) S^{(1)}(x - x') = 0, \quad (2.83)$$

которые могут быть выражены через G_F и $G^{(1)}$ следующим образом:

$$S_F(x, x') = (i\gamma^a \partial_a + m) G_F(x, x'), \quad (2.84)$$

$$S^{(1)}(x, x') = -(i\gamma^a \partial_a + m) G^{(1)}(x, x'). \quad (2.85)$$

Заметим, что, например, S_F есть матрица по спинорным индексам полей в (2.80), в полной записи имеющая вид

$$iS_F(x, x')_{ab} = \langle 0 | \psi_a(x) \psi_b^\dagger(x') | 0 \rangle \langle \gamma^0 \rangle_b \theta(t - t') - \\ - \langle 0 | \psi_b^\dagger(x') \psi_a(x) | 0 \rangle \langle \gamma^0 \rangle_b \theta(t' - t).$$

Фейнмановский пропагатор электромагнитного поля определяется выражением

$$iD_{F\alpha\beta}(x, x') = \langle 0 | T(A_\alpha(x) A_\beta(x')) | 0 \rangle, \quad (2.86)$$

которое, очевидно, калибровочно неинвариантно. С помощью (2.60) находим

$$[\eta_{\alpha\lambda} \square_x - (1 - \xi^{-1}) \partial_\alpha^x \partial_\lambda^x] D_F^{\lambda\beta}(x, x') = \delta_\alpha^\beta \delta^n(x - x'), \quad (2.87)$$

что дает для пропагатора интегральное представление

$$\begin{aligned} D_{F\alpha\beta}(x, x') = \\ = (2\pi)^{-n} \int \frac{[-\eta_{\alpha\beta} + (1 - \xi) k_\alpha k_\beta / k^2]}{(k^0)^2 - |\mathbf{k}|^2} \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') - ik^0(t - t')] d^n k. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Контур интегрирования по k^0 в (2.88) тот же, что и для G_F (рис. 3). В частности, в фейнмановской калибровке ($\xi = 1$)

$$D_{F\alpha\beta}(x, x') = -\eta_{\alpha\beta} D_F(x, x'). \quad (2.89)$$

Заметим также, что если нарушающий калибровочную симметрию член удалить, полагая $\xi \rightarrow \infty$, то (2.88) становится бесконечным. Это значит, что в отсутствие слагаемого, нарушающего калибровочную инвариантность, дифференциальный оператор в левой части (2.87) необратим.

Исследование интегральных представлений фейнмановских функций Грина, таких, как (2.76) и (2.88), выявляет полезное математическое свойство, часто используемое в практических вычислениях. Рассмотрение контуров для G_F в комплексной плоскости k^0 показывает, что топологическое соотношение между контуром (который подразумевается замкнутым полуокружностью на бесконечности) и полюсами остается неизменным, если повернуть контур на 90° против часовой стрелки, чтобы он совпал с мнимой осью k^0 от $-i\infty$ до $i\infty$. Если теперь провести замену переменных $\kappa = -ik^0$, $0 = -it$ и $\tau' = -it'$, то контур интегрирования будет снова лежать на вещественной оси, но уже не будет пересекать полюсов.

Например, в скалярном случае получаем

$$G_F(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') = -iG_E(i\tau, \mathbf{x}; i\tau', \mathbf{x}'), \quad (2.90)$$

где

$$G_E(\tau, \mathbf{x}; \tau' \mathbf{x}') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') + i\kappa(\tau - \tau')]}{k_0^2 + |\mathbf{k}|^2 + m^2} d\kappa d^{n-1}k. \quad (2.91)$$

Здесь G_E — «евклидова» функция Грина, удовлетворяющая уравнению

$$(\square_x - m^2) G_F(x, x') = -\delta^n(x - x'). \quad (2.92)$$

В (2.92) \square — эллиптический оператор

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2}{\partial (x^1)^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial (x^{n-1})^2},$$

представляющий собой оператор Даламбера в n -мерном евклидовом пространстве, а не в пространстве Минковского. Это соответствует рассмотрению поля ϕ в евклидовом пространстве.

Преимущество евклидовой теории поля в том, что эллиптический оператор имеет единственный хорошо определенный обратный оператор, поскольку полюса в интегральном представлении (2.91) лежат на мнимой, а не на вещественной оси. Поэтому часто с точки зрения математики удобнее работать в евклидовом пространстве, «поворачивая» обратно к псевдоевклидову пространству с помощью (2.90) в конце вычислений. Граничные условия для фейнмановского пропагатора этой процедурой накладываются автоматически. (Заметим, что ни один из других контуров, изображенных на рис. 3, нельзя повернуть таким способом, не пересекая полюсов.) Более детальное обсуждение вопроса (для случая искривленного пространства-времени) можно найти в работах [94, 486].

Введенные выше функции Грина были определены как математические ожидания произведений операторов поля в чистом состоянии, а именно в состоянии вакуума. Эти функции Грина пригодны для описания систем при нулевой температуре. Но система при ненулевой температуре находится не в чистом состоянии, а представляет собой статистическую смесь чистых состояний. Поэтому функции Грина для систем при ненулевой температуре определяют средним по всем чистым состояниям от математического ожидания произведений полевых операторов в этих состояниях [3, 192, 319, 354].

Предположим, что $|\psi_i\rangle$ — чистое собственное состояние гамильтониана (2.41), принадлежащее собственному значению энергии E_i . Тогда оно будет также и собственным состоянием оператора полного числа частиц N (2.32) с некоторым собственным значением n_i . Так как и число частиц и энергия могут изменяться, равновесное состояние при температуре T описывается большим каноническим ансамблем состояний. Вероятность того, что система будет находиться в состоянии $|\psi_i\rangle$, определяется выражением

$$\rho_i = e^{-\beta(E_i - \mu n_i)} / Z, \quad (2.93)$$

где

$$\beta = 1/k_B T, \quad (2.94)$$

k_B — постоянная Больцмана, μ — химический потенциал,

$$Z = \sum_i e^{-\beta(E_i - \mu n_i)} = e^{-\beta \Omega} \quad (2.95)$$

— большая статистическая сумма и Ω — термодинамический потенциал. Таким образом, среднее по ансамблю при температуре $T = (k_B\beta)^{-1}$ от любого оператора A равно

$$\langle A \rangle_\beta = \sum_i \rho_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle. \quad (2.96)$$

Вводя квантовую матрицу плотности

$$\rho = \exp [\beta (\Omega + \mu N - H)], \quad (2.97)$$

имеем

$$\rho_i = \langle \psi_i | \rho | \psi_i \rangle. \quad (2.98)$$

Требование равенства полной вероятности единице записывается в виде

$$\text{tr } \rho = \sum_i \langle \psi_i | \rho | \psi_i \rangle = 1, \quad (2.99)$$

а (2.96) сводится к равенству

$$\langle A \rangle_\beta = \text{tr } \rho A. \quad (2.100)$$

Теперь можно ввести функции Грина при ненулевой температуре (называемые также тепловыми или температурными функциями Грина) с помощью простой замены вакуумного ожидания в определении функций Грина при нулевой температуре средним по ансамблю $\langle \rangle_\beta$. Например, исходя из (2.68), в случае скалярных полей имеем

$$\begin{aligned} G_\beta^+(x, x') &= \langle \phi(x) \phi(x') \rangle_\beta, \\ G_\beta^-(x, x') &= \langle \phi(x') \phi(x) \rangle_\beta. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Принимая временно, что химический потенциал равен нулю, получаем следующее важное соотношение для тепловых функций Грина:

$$G_\beta^\pm(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') = G_\beta^\mp(t + i\beta, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}'). \quad (2.102)$$

Это соотношение получается из гейзенберговских уравнений движения

$$\phi(t, \mathbf{x}) = e^{iH(t-t_0)} \phi(t_0, \mathbf{x}) e^{-iH(t-t_0)} \quad (2.103)$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} G_\beta^+(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') &= \text{tr} [e^{-\beta H} \phi(t, \mathbf{x}) \phi(t', \mathbf{x}')] / \text{tr} (e^{-\beta H}) = \\ &= \text{tr} [e^{-\beta H} \phi(t, \mathbf{x}) e^{\beta H} e^{-\beta H} \phi(t', \mathbf{x}')] / \text{tr} (e^{-\beta H}) = \\ &= \text{tr} [\phi(t + i\beta, \mathbf{x}) e^{-\beta H} \phi(t', \mathbf{x}')] / \text{tr} (e^{-\beta H}) = \\ &= \text{tr} [e^{-\beta H} \phi(t', \mathbf{x}') \phi(t + i\beta, \mathbf{x})] / \text{tr} (e^{-\beta H}) = \\ &= G_\beta^-(t + i\beta, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') \end{aligned} \quad (2.104a)$$

и аналогично для G_{β}^{-} . При выводе этого результата было использовано соотношение $\text{tr } AB = \text{tr } BA$. Из (2.102) можно вывести подобные соотношения для других функций Грина, например, из (2.67) следует

$$G_{\beta}^{(1)}(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') = G_{\beta}^{(1)}(t + i\beta, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}'). \quad (2.104б)$$

Если удерживать химический потенциал, то это приводит лишь к появлению множителя $e^{\beta\mu}$ в правой части. Заметим однако, что

$$iG_{\beta}(x, x') = iG(x, x') = [\phi(x), \phi(x')], \quad (2.105)$$

поскольку коммутатор свободных скалярных полей есть c -число (это следует из (2.18)), и его статистическое и вакуумное ожидания равны между собой. Для теорий с взаимодействием это, вообще говоря, неверно, так как соответствующий коммутатор (при неравных временах) может быть оператором.

Используя (2.105) и соотношения типа (2.104) для других функций Грина, можно получить интегральные представления для тепловых функций Грина. С помощью (2.105) находим фурье-образ функции G_{β} :

$$iG(x, x') = iG_{\beta}(x, x') = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega c(\omega; x, x') e^{-i\omega(t-t')}, \quad (2.106)$$

где $c(\omega; x, x')$ легко вычислить, исходя из (2.76), при соответствующем выборе контура интегрирования:

$$c(\omega; x, x') = (2\pi)^{1-n} \int d^{n-1}k \delta(\omega^2 - |k|^2 - m^2) \times \\ \times [\theta(\omega) - \theta(-\omega)] e^{ik \cdot (x-x')}. \quad (2.107)$$

Если записать также фурье-образ функции G_{β}^{\pm} в виде

$$G_{\beta}^{\pm}(x, x') = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega g^{\pm}(\omega) e^{-i\omega(t-t')}, \quad (2.108)$$

то из (2.67) найдем

$$c(\omega) = g^{+}(\omega) - g^{-}(\omega). \quad (2.109)$$

Из соотношения (2.104а) следует $g^{+}(\omega) = e^{\beta\omega} g^{-}(\omega)$, что вместе с (2.109) дает

$$g^{\pm}(\omega) = \pm c(\omega) (1 - e^{\mp\beta\omega})^{-1},$$

приводя к интегральному представлению

$$G_{\beta}^{\pm}(x, x') = \pm \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{c(\omega)}{1 - e^{\mp\beta\omega}} e^{-i\omega(t-t')}. \quad (2.110)$$

На основе этой формулы могут быть получены представления для других функций Грина. В частности, вычислив явно интегралы и разложив множители $(1 - e^{\mp \beta \omega})^{-1}$ по степеням $e^{\mp \beta \omega}$, найдем

$$G_{\beta}^{(1)}(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G^{(1)}(t + ik\beta, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}'), \quad (2.111)$$

т. е. тепловая функция Грина может быть записана в виде бесконечной суммы функций Грина при нулевой температуре, взятых в моменты времени, сдвинутые на мнимую величину.

В случае спина $1/2$ ввиду того, что поля не коммутируют, а антикоммутируют, находим, что аналог (2.81) при температуре, не равной нулю, $S_{\beta}^{(1)}$ удовлетворяет условию антипериодичности

$$S_{\beta}^{(1)}(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') = -S_{\beta}^{(1)}(t + i\beta, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}'), \quad (2.112)$$

заменяющему условие периодичности (2.104). Далее получаем представление в виде суммы, аналогичное (2.111), в котором антипериодичность проявляется в наличии множителя $(-1)^k$:

$$S_{\beta}^{(1)}(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k S^{(1)}(t + ik\beta, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}'). \quad (2.113)$$

Случай коммутирующих полей спина 1 аналогичен скалярному случаю (см., например, [66]).

2.8. Квантование методом интегрирования по траекториям

Схема канонического квантования, кратко описанная в разд. 2.1, представляет собой лишь один из различных подходов, существующих в квантовой теории поля. Можно, например, исходить из ковариантных коммутационных соотношений

$$[\phi(x), \phi(x')] = iG(x, x') \quad (2.114)$$

(вспомним (2.65), учитывая, что G есть c -число) вместо канонических коммутационных соотношений (2.15). Такой путь ближе по духу к общей теории относительности, поскольку в (2.114) время t не играет выделенной роли. Он немедленно приводит к тем же коммутационным соотношениям (2.18) для операторов рождения и уничтожения. В случае глобально гиперболического пространства-времени (см. разд. 3.1) ковариантный и канонический подходы эквивалентны.

Другая схема квантования, применяемая в квантовой теории поля, наиболее близкая к строгой трактовке в функциональном анализе, — это метод C^* -алгебр Сигала [430] (обзор применения этого подхода к случаю искривленного пространства-времени, см. в работе [310]).

Наконец, фейнмановский подход к квантованию с помощью интегралов по траекториям [194] является эффективным методом в квантовой теории гравитации и при квантовании взаимодействующих полей с присущими им проблемами перенормировок. Более подробное изложение можно найти в работах [1, 211, 317, 373, 411, 452].

Основным объектом теории является функциональный интеграл для поля ϕ , обладающего действием S ,

$$Z[J] = \langle \text{out}, 0 | 0, \text{in} \rangle = \int \mathcal{D}[\phi] \exp \left\{ iS[\phi] + i \int d^n x J(x) \phi(x) \right\}, \quad (2.115)$$

который вычисляют по пространству функций ϕ с надлежащей мерой. Величина Z известна как производящий функционал теории; она дает амплитуду перехода из начального вакуумного состояния $|0, \text{in}\rangle$ в конечное вакуумное состояние $|0, \text{out}\rangle$ в присутствии источника частиц $J(x)$. При выключении источника оба вакуума сводятся к обычному вакууму пространства Минковского без источников, и мы имеем

$$Z[0] = \langle 0 | 0 \rangle \quad (2.116)$$

(что обычно нормируется на единицу).

Можно показать, что функциональные производные Z по J дают связанные, хронологически упорядоченные функции Грина

$$i^j \langle 0 | T(\phi(x_1) \dots \phi(x_j)) | 0 \rangle_c = \left(\frac{\delta^j \ln Z}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_j)} \right)_{J=0} \quad (2.117)$$

(индекс c означает, что в теории возмущений учитываются только связанные фейнмановские диаграммы).

В качестве примера рассмотрим случай свободного скалярного поля, обладающего действием

$$S[\phi] = \int d^n x \left[\mathcal{L}_0(x) + \frac{1}{2} i\epsilon \phi^2(x) \right],$$

где \mathcal{L}_0 — лагранжиан свободного поля (2.2), а инфинитезимальный фактор (связанный с граничными условиями для ϕ) введен для того, чтобы сделать функциональный интеграл сходящимся. Подставляя вместо \mathcal{L}_0 выражение (2.2) и интегрируя по частям, приводим действие к виду

$$S[\phi] = \int d^n x \left[-\frac{1}{2} \phi(\square + m^2 - i\epsilon) \phi \right], \quad (2.118)$$

где опущен поверхностный член. С помощью (2.118) экспоненту в (2.115) можно записать в более удобной для интерпретации форме

$$-\frac{1}{2} \int d^n x d^n y \phi(x) K_{xy} \phi(y) + \int J(x) \phi(x) d^n x, \quad (2.119)$$

где симметрический оператор

$$K_{xy} = (\square_x + m^2 - ie) \delta^n(x - y) \quad (2.120)$$

формально можно считать симметричной матрицей K с непрерывно изменяющимися индексами x, y , обладающей свойствами

$$\int d^2y K_{xy}^{1/2} K_{yz}^{1/2} = K_{xz}, \quad (2.121)$$

$$\int d^n y K_{xy}^{1/2} K_{yz}^{-1/2} = \delta^n(x - z), \quad (2.122)$$

$$K_{xy}^{-1} = -G_F(x, y), \quad (2.123)$$

где последний результат получен путем обращения определения фейнмановского пропагатора (2.74). Эти равенства становятся хорошо определенными при подстановке их в функциональный интеграл по $\mathcal{D}[\phi]$.

Вводя вместо ϕ новую переменную интегрирования

$$\phi'(x) = \int d^n y K_{xy}^{1/2} \phi(y), \quad (2.124)$$

запишем квадратичную форму (2.119) с учетом (2.121) — (2.123) в виде

$$-\frac{1}{2} \int d^n x \left[\phi'(x) - \int d^n y J(y) K_{yx}^{-1/2} \right]^2 - \frac{1}{2} \int d^n x d^n y J(x) G_F(x, y) J(y). \quad (2.125)$$

После подстановки (2.125) в экспоненту в функциональном интеграле второй член, не зависящий от ϕ , можно вынести за знак интеграла, а первый член приводит к интегралу гауссова типа, взятие которого дает численный коэффициент.

Таким образом,

$$Z(J) \sim (\det K^{1/2})^{-1} \exp \left[-\frac{1}{2} i \int d^n x d^n y J(x) G_F(x, y) J(y) \right], \quad (2.126)$$

где

$$(\det K^{1/2})^{-1} = [\det (-G_F)]^{1/2} = \exp \left[\frac{1}{2} \text{tr} \ln (-G_F) \right] \quad (2.127)$$

— якобиан, возникающий вследствие замены переменной (2.124).

Из формулы (2.126) следует, например,

$$\left(\frac{\delta^2 \ln Z}{\delta J(x) \delta J(y)} \right)_{J=0} = -\langle 0 | (T(\phi(x) \phi(y))) | 0 \rangle = -i G_F(x, y)$$

в соответствии с определением (2.69).

Для поля ψ спина $1/2$ производящий функционал Z выбирают в виде

$$Z(\eta, \bar{\eta}) = \int \mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[\bar{\psi}] \exp \left\{ i \int d^n x [\mathcal{L}_0(x) + \bar{\eta}(x) \psi(x) + \eta(x) \bar{\psi}(x)] \right\}, \quad (2.128)$$

где $\eta, \bar{\eta}$ — антикоммутирующие внешние токи, а лагранжиан \mathcal{L}_0 определен формулой (2.45). Вместо (2.126) получаем

$$Z(\eta, \bar{\eta}) \sim (\det S_E)^{-1} \exp \left[-i \int d^n x \bar{\eta}(x) S_F(x, y) \eta(y) \right]. \quad (2.129)$$

В случае электромагнитного поля возникают некоторые усложнения, связанные с калибровочной симметрией. Действительно, рассмотрим аналог выражения (2.115)

$$Z(J) = \int \mathcal{D}[A_\alpha] \exp \left\{ i \int d^n x [\mathcal{L}_0(x) + J^\beta(x) A_\beta(x)] \right\}, \quad (2.130)$$

где $\mathcal{L}_0(x)$ определен формулой (2.54). Действие, входящее в экспоненту в (2.130), может быть представлено в виде

$$\int d^n x \mathcal{L}_0(x) = -\frac{1}{4} \int F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} d^n x = -\frac{1}{2} \int d^n x d^n y A_\alpha(x) K_{xy}^{\alpha\beta} A_\beta(y), \quad (2.131)$$

$$K_{xy}^{\alpha\beta} = (\eta^{\alpha\beta} \square_x - \partial_x^\alpha \partial_x^\beta) \delta^n(x - y). \quad (2.132)$$

Из формул (2.87), (2.88) следует, что в пределе $\xi \rightarrow \infty$ величина $K^{-1} = D_F(\xi \rightarrow \infty)$ сингулярна. Поэтому, как мы увидим ниже, квантование электромагнитного поля непосредственно с помощью описанной процедуры выполнить не удастся. Эта трудность была отмечена в связи с калибровочной инвариантностью на стр. 27, где в лагранжиан введен фиксирующий калибровку член (2.59) (исчезающий в пределе $\xi \rightarrow \infty$), благодаря которому волновой оператор становится обратимым и может быть определена функция Грина (2.88) для конечных ξ .

Поскольку лагранжиан \mathcal{L}_0 явно калибровочно инвариантен, он не зависит от продольной и временной компонент A_α , т. е. K выделяет поперечные компоненты поля. Следовательно, любое изменение продольной и временной компонент A_α будет оставлять \mathcal{L}_0 неизменным. Вообще переход к новому потенциалу A_α , связанному с первоначальным A_α преобразованием калибровки (2.58), не будет изменять лагранжиана \mathcal{L}_0 .

Если представить себе пространство всех функций A_α , то под действием калибровочного преобразования (2.58) точка (т. е. функция A_α) этого пространства будет отображаться в точки на линии, изображающей другие функции, которые связаны с исходной функцией A_α непрерывным калибровочным преобразованием. Такая линия называется *орбитой* калибровочной группы, ассо-

дируемой с преобразованием (2.58). Трудность с функциональным интегрированием возникает из-за того, что изменение A_α в $\mathcal{D}[A_\alpha]$ вдоль орбит не вызывает каких-либо изменений $\mathcal{L}_0(x)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что функциональный интеграл в (2.130) вычисляется по бесконечному объему в функциональном пространстве, поэтому для сходимости интеграла необходимо стремление $\mathcal{L}_0(x) \rightarrow \infty$ при $A_\alpha \rightarrow \infty$, обеспечивающее экспоненциальное спадание. Однако, если $A_\alpha \rightarrow \infty$ вдоль орбиты калибровочной группы, то \mathcal{L}_0 остается постоянным (и, следовательно, конечным), что не обеспечивает требуемой сходимости. Так как объем занимаемого орбитой подпространства также бесконечен, функциональный интеграл остается неопределенным, пока не найден способ перенормировать его путем деления на этот бесконечный объем.

Один из способов преодоления этой трудности был указан Фаддеевым и Поповым [190], развившими более ранние работы Фейнмана [193] и де Витта [153, 155]. Требуется, чтобы изменение A_α было ограничено лишь функциями, принадлежащими различным орбитам. Этого можно добиться, выбирая в пространстве A_α «гиперповерхность», пересекающую каждую орбиту лишь один раз. Далее, вместо того чтобы интегрировать по всему пространству, вычисляют интеграл только по гиперповерхности.

Уравнение такой гиперповерхности можно записать в виде

$$F[A_\alpha] = 0, \quad (2.133)$$

поэтому можно было бы предположить, что достаточно лишь ввести в подынтегральное выражение в (2.130) дельта-функцию $\delta[F(A_\alpha)]$. Но чтобы обеспечить калибровочную инвариантность, нужно действовать более осторожно. Две соседние гиперповерхности связаны соотношением

$$F(A_\alpha^\Lambda(x)) = F(A_\alpha(x)) + \int d^n y M_{xy} \Lambda(y) + O(\Lambda^2), \quad (2.134)$$

где Λ параметризует калибровочное преобразование, $F(A_\alpha) = [F(A_\alpha^\Lambda)]_{\Lambda=0}$, а M зависит от выбора калибровки. Например, в калибровке Ландау $F(A_\alpha) = A_{,\alpha}^\alpha$, поэтому

$$F(A_\alpha^\Lambda) = A_{,\alpha}^\alpha + \square \Lambda = F(A_\alpha) + \square \Lambda, \quad (2.135)$$

откуда следует

$$M_{xy} = \square \delta^n(x - y). \quad (2.136)$$

Удобно ввести величину $\Delta_F(A_\alpha)$ с помощью соотношения

$$\Delta_F^{-1}(A_\alpha) = \int \mathcal{D}[\Lambda] \delta[F(A_\alpha^\Lambda)], \quad (2.137)$$

которое, как легко показать, является калибровочно инвариантным. На гиперповерхности (2.133) первый член в правой части

(2.134) исчезает, поэтому в символической записи $F(A_\alpha^\Lambda) = M\Lambda$. Тогда интегрирование в (2.137) может быть выполнено с помощью перехода от переменной Λ к переменной $M\Lambda$:

$$\Delta_F^{-1}(A_\alpha) = (\det M)^{-1} = \exp(-\operatorname{tr} \ln M), \quad (2.138)$$

где $(\det M)^{-1}$ — якобиан, возникающий в результате этой замены переменной.

Возвращаясь к функциональному интегралу (2.130) (с J , равным нулю), вызвавшему эти осложнения, учитывая (2.137), можно, не изменяя результата, подставить в подынтегральное выражение единичный оператор $\Delta_F(A_\alpha) \int \mathcal{D}[\Lambda] \delta[F(A_\alpha^\Lambda)]$. Учитывая независимость величины Δ_F от выбора калибровки, можно заменить ее аргумент на A_α^Λ , и далее, сделав замену переменной интегрирования, переписать функциональный интеграл в виде

$$\int \mathcal{D}[A_\alpha] \int \mathcal{D}[\Lambda] \Delta_F(A_\alpha) \delta[F(A_\alpha)] \exp\left[i \int \mathcal{L}_0(x) d^n x\right], \quad (2.139)$$

откуда ясно, что подынтегральное выражение в интеграле по $\mathcal{D}[\Lambda]$ не зависит от Λ и, следовательно, может быть вынесено за знак интеграла. Результирующий интеграл, хотя и бесконечен, не зависит от полей A_α , поэтому разделив на него (2.139), приходим к новому определению величины Z , которое уже не приводит к сингулярностям:

$$Z = \int \mathcal{D}[A_\alpha] \delta[F(A_\alpha)] \exp\left\{i \int d^n x [\mathcal{L}_0(x) + J^\alpha(x) A_\alpha(x) - i \operatorname{tr} \ln M]\right\}. \quad (2.140)$$

При получении (2.140) учтено, что множитель $\delta[F(A_\alpha)]$ в подынтегральном выражении в (2.139) ограничивает Δ_F гиперповерхностью (2.133), что позволяет использовать результат (2.138).

Таким образом, ограничение интегрирования гиперповерхностью $F(A_\alpha) = 0$ не только означает введение в подынтегральное выражение множителя $\delta[F(A_\alpha)]$, но также приводит к появлению дополнительного члена в действии для поля. Этот добавочный вклад может рассматриваться как происходящий от дополнительного фиктивного поля. Действительно, нетрудно показать, что в калибровке Ландау

$$\int \mathcal{D}[c] \mathcal{D}[c^*] \exp\left(i \int \eta^{a\beta} \partial_a c \partial_\beta c^*\right) = \exp(-\operatorname{tr} \ln M), \quad (2.141)$$

где c и c^* — безмассовые скалярные поля, удовлетворяющие, однако, антикоммутационным соотношениям, ввиду чего они получили название «духовые поля Фаддеева — Попова». Поскольку они не связаны с векторным полем A_α , эти поля обычно опускают в квантовой теории поля в плоском пространстве-времени. Но в искривленном пространстве-времени они играют важную роль.

Векторную часть интеграла по траекториям можно далее упростить в калибровке Ландау, выражая $\delta[F(A_\alpha)] = \delta(A^\alpha, \alpha)$ в виде экспоненты:

$$\delta(A^\alpha, \alpha) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \exp \left[-\frac{i}{2\xi} \int (A^\alpha, \alpha)^2 d^n x \right]. \quad (2.142)$$

Сравнение с (2.59) показывает, что эта экспонента в калибровке Ландау ($\xi \rightarrow 0$) есть просто $i\mathcal{L}_G$. Следовательно, производящий функционал для векторного поля равен

$$\int \mathcal{D}[A_\alpha] \exp \left[i \int d^n x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_G) \right]. \quad (2.143)$$

Этот функциональный интеграл может быть вычислен с помощью тех же приемов, что и в случае скалярного поля; он оказывается пропорциональным выражению

$$\exp \left[-\frac{1}{2} i \int d^n x d^n y J_\alpha(x) D_F^{\alpha\beta}(x-y) J_\beta(y) \right], \quad (2.144)$$

где $D_F^{\alpha\beta}$ определяется формулой (2.88).

Хотя полный производящий функционал, представляющий собой произведение (2.144) и (2.141), был получен в калибровке Ландау $\xi \rightarrow 0$, найденное выражение остается справедливым при любом ξ .

Закончим эту главу краткими замечаниями о сходимости функционального интеграла (2.115). Поскольку действие S вещественно, экспонента в подынтегральном выражении является чисто мнимой, вследствие чего интеграл по всему функциональному пространству не является хорошо определенным. В предшествовавшем изложении это положение было исправлено введением множителя $i\epsilon$. Как было замечено в разд. 2.7, использование $i\epsilon$ в определении фейнмановских функций Грина эквивалентно переходу к описанию в мнимом времени, когда поле рассматривается в евклидовом пространстве, а не в пространстве Минковского. Если вакуумные ожидания от произведений хронологически упорядоченных полей, такие, как (2.117), аналитичны в комплексной плоскости t , то можно проводить квантование в евклидовом пространстве, в котором интегралы по траекториям становятся хорошо определенными сильно сходящимися интегралами гауссова типа (по крайней мере для широкого класса лагранжианов), а затем вернуться к теории в пространстве Минковского, «поворачивая» назад от it к t . Такой метод часто используют на практике. Однако при переходе к искривленному пространству может случиться, что «евклидизированное» (т. е. имеющее положительно определенную метрику) пространство-время, соответствующее исходному псевдориманову пространству-времени, вообще не существует.

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

В настоящей главе проводится обобщение формализма квантовой теории поля на случай искривленного пространства-времени. Предварительно кратко обсуждаются основные понятия псевдоримановой геометрии. Это введение не претендует на полноту; более полное изложение читатель может найти в книгах [287, 313, 494]. Тем, кто не знаком с конформными преобразованиями и диаграммами Пенроуза, советуем внимательно прочитать разд. 3.1.

Обобщение понятия частиц на искривленное пространство-время технически осуществляется довольно просто. Однако физическое истолкование возникающего формализма встречает затруднения. По поводу смысла и содержания понятия частиц при наличии фонового гравитационного поля высказывались противоречивые суждения. В некоторых случаях, например в статическом пространстве-времени, понятие частиц кажется хорошо определенным, в других (если пространство допускает существование замкнутых времениподобных линий или не обладает всюду поверхностями Коши) оно может показаться безнадежно неясным. Здесь мы ограничиваемся «хорошими» пространствами и не предаемся философским рассуждениям о смысле понятия частиц. Вместо этого формализм непосредственно связывается с теми величинами, которые могли бы быть измерены в интересующем нас квантовом состоянии с помощью некоторого прибора. Понятие частиц в искривленном пространстве-времени используется здесь именно в таком операционном смысле. Такой подход и ранее обсуждался в литературе, но в этой книге представления о детекторах частиц развиты более детально, чем это было до сих пор.

Используя конкретный пример рождения частиц переменным фоновым гравитационным полем, мы проводим подробный и углубленный анализ адиабатичности и на нем основываем представление о частицах в квазистатическом пространстве-времени. Именно здесь следует ожидать соприкосновения с обычной квантовой теорией поля, которая, как известно, является хорошим приближением для (относительно) медленно расширяющейся вселенной, где мы находимся. Из анализа следует, что поведение

высокочастотной части поля не зависит от квантового состояния или глобальной структуры пространства-времени, а определяется только его локальной геометрией. Это обстоятельство является решающим при проведении программы регуляризации и перенормировок в последующих главах.

В разд. 3.5 мы попытались дать полное изложение представления об адиабатических состояниях, и этот раздел требует тщательного изучения. Наиболее существенным моментом является применение адиабатического предельного перехода к фейнмановскому пропагатору, что проводится в разд. 3.6. «Вершиной» формализма можно считать так называемое представление де Витта — Швингера для функции Грина G_F , определяемое разложением (3.141). Важность этого разложения в теории перенормировок трудно переоценить. Рекомендуем читателю сначала ознакомиться с разд. 3.5, обращая внимание на замечания физического характера, и вернуться к более детальному изучению этого раздела после того, как будут рассмотрены следующие приложения.

Раздел 3.7, посвященный конформному вакууму, значительно легче для восприятия. Он необходим для дальнейших приложений, в частности при проведении конкретных расчетов космологического рождения частиц и квантового натяжения вакуума.

Последний раздел, посвященный полям высших спинов в искривленном пространстве, содержит лишь краткое изложение стандартного формализма, но приводимые здесь выражения (3.190) — (3.195) для тензоров энергии-импульса будут часто использоваться.

3.1. Структура пространства-времени

Мы принимаем определение пространства-времени как n -мерного, глобально гиперболического псевдориманова многообразия класса C^∞ (более подробное обсуждение можно найти в работе [287]). Такое определение может оказаться более ограничительным, чем это необходимо для построения жизнеспособной квантовой теории поля (пример теории в пространстве-времени, не удовлетворяющем условию глобальной гиперболичности, см. в работе [16]). Условия дифференцируемости обеспечивают существование дифференциальных уравнений, а глобальная гиперболичность — существование поверхностей Коши.

Псевдориманова метрика $g_{\mu\nu}$, ассоциируемая с элементом длины

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu, \quad \mu, \nu = 0, 1, \dots, (n-1),$$

имеет сигнатуру $n - 2$. Для покрытия полного многообразия может понадобиться несколько координатных сеток с соответствующими

щими $g_{\mu\nu}$. Детерминант определим следующим образом:

$$g \equiv |\det g_{\mu\nu}|.$$

Мы будем часто использовать конформные диаграммы Пенроуза [394] для изображения причинной структуры пространства-времени. Этот метод позволяет представить все бесконечное пространство-время в виде конечной диаграммы (компактного многообразия) с помощью *конформного преобразования* метрики. Конформные преобразования, сжимающие или растягивающие многообразие, следует отличать от преобразований координат $x^\mu \rightarrow x'^\mu$, которые лишь изменяют обозначения точек на некоторой карте, оставляя геометрию без изменений. Конформное преобразование метрики имеет вид

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x), \quad (3.1)$$

где $\Omega(x)$ — некоторая непрерывная, неисчезающая, конечная, вещественная функция.

Исходя из этого преобразования метрики, можно вывести трансформационные свойства различных физических величин относительно конформных преобразований. Например, символы Кристоффеля, тензор Риччи и скалярная кривизна преобразуются соответственно как

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho \rightarrow \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \Omega^{-1} (\delta_{\mu}^\rho \Omega_{;\nu} + \delta_{\nu}^\rho \Omega_{;\mu} - g_{\mu\nu} g^{\rho\alpha} \Omega_{;\alpha}), \quad (3.2)$$

$$R_{\mu}^{\nu} \rightarrow \bar{R}_{\mu}^{\nu} = \Omega^{-2} R_{\mu}^{\nu} - (n-2) \Omega^{-1} (\Omega^{-1})_{;\mu} g^{\nu\alpha} + \\ + (n-2)^{-1} \Omega^{-n} (\Omega^{n-2})_{;\rho\sigma} g^{\rho\sigma} \delta_{\mu}^{\nu}, \quad (3.3)$$

$$R \rightarrow \bar{R} = \Omega^{-2} R + 2(n-1) \Omega^{-3} \Omega_{;\mu\nu} g^{\mu\nu} + (n-1)(n-4) \times \\ \times \Omega^{-4} \Omega_{;\mu} \Omega_{;\nu} g^{\mu\nu}, \quad (3.4)$$

откуда можно получить следующее полезное преобразование:

$$[\square + \frac{1}{4}(n-2)R/(n-1)]\phi \rightarrow [\bar{\square} + \frac{1}{4}(n-2)\bar{R}/(n-1)]\bar{\phi} = \\ = \Omega^{-(n+2)/2} [\square + \frac{1}{4}(n-2)R/(n-1)]\phi, \quad (3.5)$$

где

$$\square\phi = g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \phi = (-g)^{-1/2} \partial_{\mu} [(-g)^{1/2} g^{\mu\nu} \partial_{\nu} \phi], \quad (3.6)$$

$$\bar{\phi}(x) = \Omega^{(2-n)/2}(x) \phi(x). \quad (3.7)$$

В качестве простой иллюстрации построения диаграмм Пенроуза рассмотрим двумерное пространство Минковского с элементом длины

$$ds^2 = dt^2 - dx^2. \quad (3.8)$$

Мы часто используем также изотропные координаты

$$\begin{aligned} u &= t - x, \\ v &= t + x, \end{aligned} \quad (3.9)$$

в которых элемент длины (3.8) имеет вид

$$ds^2 = du dv, \quad (3.10)$$

так что

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Допустим, что мы совершаем *преобразование координат*

$$\begin{aligned} u' &= 2 \operatorname{arctg} u, \\ v' &= 2 \operatorname{arctg} v, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где

$$-\pi \leq u', v' \leq \pi. \quad (3.13)$$

Тогда из (3.10) получаем

$$ds^2 = \frac{1}{4} \cos^{-2} \frac{1}{2} u' \cos^{-2} \frac{1}{2} v' du' dv', \quad (3.14)$$

так что

$$g_{\mu\nu}(u', v') = \frac{1}{8} \cos^{-2} \frac{1}{2} u' \cos^{-2} \frac{1}{2} v' \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Если теперь провести конформное преобразование метрики с помощью функции

$$\Omega^2(x) = \left(\frac{1}{4} \cos^{-2} \frac{1}{2} u' \cos^{-2} \frac{1}{2} v' \right)^{-1},$$

то

$$g_{\mu\nu}(u', v') \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu}(u', v') = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

и связанный конформным преобразованием элемент длины принимает вид

$$ds^2 = du' dv'. \quad (3.17)$$

Он имеет тот же вид, что и элемент длины в первоначальном пространстве Минковского (3.10), но покрывает только компактную область (3.13), как показано на рис. 4. Действие конформного преобразования (3.16) состоит в «подтягивании» бесконечности к граничным линиям на диаграмме.

Границы на рис. 4 обладают рядом интересных особенностей. Прежде всего заметим, что все изотропные лучи остаются на диаграмме Пенроуза лежащими под углом 45° : конформные преобразования оставляют инвариантными изотропные конусы. Поэтому анализ причинных отношений можно проводить с

помощью изотропных линий, изображаемых так же, как в обычном пространстве Минковского. Ясно, что все изотропные линии оканчиваются на граничных диагоналях, отмеченных символами \mathcal{I}^+ и \mathcal{I}^- и называемых соответственно изотропной бесконечностью будущего и прошлого. Асимптотически времениподобные линии сходятся к точкам, обозначенным i^+ (времениподобная бесконечность будущего) и i^- (времениподобная бесконечность прошлого). Аналогично асимптотически пространственноподобные линии сходятся к i^0 (пространственноподобной бесконечности).

Изложенный анализ применим и к случаю четырехмерного пространства Минковского, если каждую точку диаграммы рассматривать как двумерную сферу, за исключением точек на вертикальной оси, и i^0 , изображающих отдельные пространственно-временные точки. Таким образом, линии \mathcal{I}^+ и \mathcal{I}^- в действительности представляют собой трехмерные изотропные поверхности.

Времениподобная линия, являющаяся асимптотически изотропной, может возникнуть, если некоторая частица испытывает постоянное равномерное ускорение и ее скорость приближается к скорости света при $t \rightarrow \infty$. Мировая линия такой частицы изображена на рис. 5. Изотропная асимптота обладает тем свойством, что лежащие выше ее события не могут быть причинно связаны с ускоряющейся частицей. Иначе говоря, сигнал от этих событий не может достигать частицы (хотя обратное может быть неверным). Изотропная асимптота является поэтому *горизонтом событий* для ускоренной частицы, хотя и не является горизонтом для неускоренной частицы.

В качестве другой иллюстрации применения диаграмм Пенроуза рассмотрим четырехмерное пространство-время Шварцшильда, описываемое элементом длины

$$ds^2 = (1 - 2M/r) dt^2 - (1 - 2M/r)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.18)$$

Это пространство-время представляет собой единственное сферически симметричное вакуумное решение уравнений Эйнштейна и часто используется для изображения пустой пространственной области, окружающей сферическую звезду или коллапсирующее тело массы M .

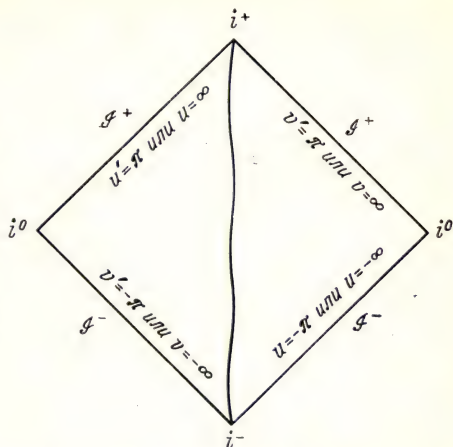
После перехода к координатам Крускала [334]

$$\begin{aligned} \bar{u} &= -4Me^{-u/4M}, \\ \bar{v} &= 4Me^{v/4M}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где $u = t - r^*$, $v = t + r^*$ и $r^* = r + 2M \ln |(r/2M) - 1|$, элемент длины (3.18) можно представить в виде

$$ds^2 = (2M/r) e^{-r/2M} d\bar{u} d\bar{v} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.20)$$

Рис. 4. Конформная диаграмма Пенроуза пространства Минковского. Компактная область $-\pi \leq u', v' \leq \pi$ является конформным изображением всего пространства Минковского ($-\infty \leq u, v \leq \infty$). Изотропные лучи $u, v = \text{const}$ остаются под углом 45° . Показана мировая линия асимптотически времениподобного наблюдателя.



Часть этой метрики, содержащая произведение $d\bar{u} d\bar{v}$, конформно эквивалентна метрике двумерного пространства Минковского (3.10), которое в свою очередь может быть компактифицировано координатными и конформными преобразованиями (3.12) и (3.16). Результирующая диаграмма Пенроуза идентична изображенной на рис. 4. Но левый край ромба в этом случае не есть \mathcal{I} , так как из (3.19) следует, что переменные \bar{u} и \bar{v} определены лишь в квадранте $-\infty < \bar{u} \leq 0, 0 \leq \bar{v} \leq \infty$. Таким образом, левый край изображает области $\bar{u} = 0$ и $\bar{v} = 0$ или $r = 2M, t = \pm\infty$. Координатная система u, v (или t, r) имеет здесь сингулярность, которая отсутствует для координат \bar{u}, \bar{v} , в чем легко убедиться, сравнивая метрики (3.18) и (3.20). Поэтому пространство-время можно аналитически продолжить за левый край, используя координаты Крускала \bar{u}, \bar{v} , определенные на всей плоскости $-\infty < \bar{u}, \bar{v} < \infty$. Результирующая диаграмма Пенроуза показана на рис. 6, и это пространство-время известно как максимально расширенное многообразие Крускала.

Горизонтальные зигзагообразные линии изображают точку $r = 0$ в прошлом и будущем. Здесь метрика Крускала (3.20) имеет особенность, которая является истинной особенностью пространства-времени, как следует из рассмотрения тензора Римана. Многообразие не может быть аналитически продолжено за эти края. В левой части диаграммы имеется другая пространственно-временная область II, асимптотически представляющая собой пространство Минковского, которая содержит поверхности \mathcal{I} при $\bar{u} = +\infty, \bar{v} = -\infty$. Эта половина многообразия геометрически тождественна правому ромбу I с точностью до изменения направления времени ($t \rightarrow -t$).

Изотропный луч $\bar{u} = 0$ ($r = 2M, t = +\infty$) представляет собой последний нулевой луч, достигающий \mathcal{I}^+ : при $\bar{u} > 0$ все

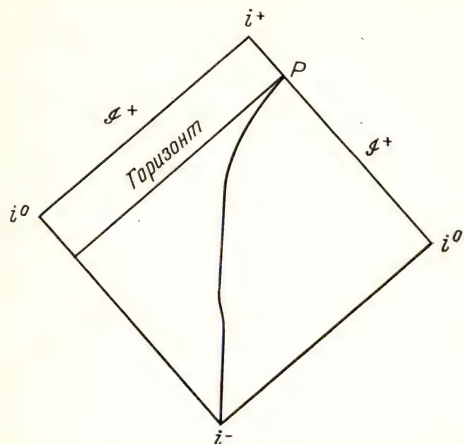


Рис. 5. Временеподобная мировая линия представляет наблюдателя, непрерывно ускоряющегося вправо и асимптотически достигающего скорости света. Но эта мировая линия не доходит до i^+ , а пересекает \mathscr{I}^+ в точке P . Таким образом, изотропный луч, проходящий через P в обратном направлении, действует как горизонт событий, поскольку события, лежащие выше, не могут восприниматься наблюдателем: все нулевые лучи от таких событий пересекают \mathscr{I}^+ между точками P и i^+ .

изотропные лучи попадают на сингулярность будущего $r = 0$. Поэтому луч $\bar{u} = 0$ (изображающий направленную наружу двумерную поверхность в полной четырехмерной картине) является горизонтом событий для наблюдателей, находящихся в области I. Аналогично $\bar{v} = 0$ ($r = 2M$, $t = -\infty$) есть горизонт событий для наблюдателей, находящихся в области II. Таким образом, вакуумные области III и IV являются черными дырами для наблюдателей, находящихся в области I и II соответственно (и белыми дырами для наблюдателей в областях II, I). Мировые линии наблюдателей, не попадающие в черные дыры и не выходящие из белых дыр, сходятся в i^+ и i^- в соответствующих областях. Существование горизонта событий делает невозможным сообщение между областями I и II.

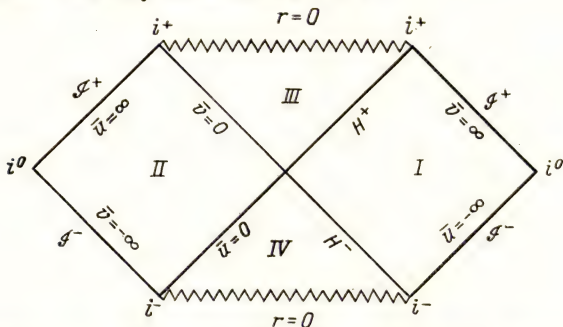


Рис. 6. Диаграмма Пенроуза максимально расширенного многообразия Крускала. Физическая сингулярность изображена ломаной линией. Горизонты будущего и прошлого, отмеченные символами H^\pm соответственно, представляются изотропными лучами $\bar{u} = 0$, $\bar{v} = 0$. Наблюдатели, не падающие в черную дыру (и не выходящие из белой дыры), находятся в одной из ромбовидных областей I или II.

Максимально расширенное пространство-время Крускала является всюду (кроме точки $r = 0$) решением вакуумных уравнений Эйнштейна. В реальном мире, где черные дыры, вероятно, образуются при схлопывании звезды, вакуумные уравнения описывают лишь область вне звезды, и, следовательно, к этому случаю относится только часть рис. 6. Тем не менее, как показано в гл. 8, для наблюдателей, находящихся в области I, различие становится несущественным в поздние моменты времени ($t \rightarrow \infty$) после схлопывания.

Наше рассмотрение, как правило, будет ограничено пространствами, обладающими определенной геометрической симметрией. Симметрии могут быть описаны с помощью векторов Киллинга ξ^μ , которые являются решениями уравнений Киллинга

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}(x) = 0, \quad (3.21)$$

где \mathcal{L}_ξ — производная Ли вдоль векторного поля ξ^μ . Уравнение (3.21) может быть записано в виде

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0. \quad (3.22)$$

Нас также будут интересовать симметрии, связанные с конформно-плоским характером метрики, когда пространство-время конформно-эквивалентно пространству Минковского. Такая геометрия допускает *конформное* векторное поле Киллинга, удовлетворяющее конформному обобщению (3.21)

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}(x) = \lambda(x) g_{\mu\nu}(x), \quad (3.23)$$

где $\lambda(x)$ — некоторая (несингулярная, неисчезающая) скалярная функция.

3.2. Квантование скалярного поля

Формально квантование поля в искривленном пространстве-времени проводится аналогично случаю пространства Минковского. Мы исходим из плотности лагранжиана (разд. 3.8)

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} [-g(x)]^{1/2} \{g^{\mu\nu}(x) \phi(x)_{;\mu} \phi(x)_{;\nu} - [m^2 + \xi R(x)] \phi^2(x)\}, \quad (3.24)$$

где $\phi(x)$ — скалярное поле, m — масса кванта поля. Связь между скалярным и гравитационным полями, представленная членом $\xi R \phi^2$, где ξ — некоторый численный множитель, а $R(x)$ — скалярная кривизна Риччи, введена как единственно возможная локальная скалярная связь с правильной размерностью. Соответствующее действие имеет вид

$$S = \int \mathcal{L}(x) d^n x, \quad (3.25)$$

где n — размерность пространства-времени. Принимая, что вариация действия по ϕ равна нулю, приходим к уравнению для скалярного поля

$$[\square_x + m^2 + \xi R(x)] \phi(x) = 0, \quad (3.26)$$

где оператор \square задан выражением (3.6).

Два значения параметра ξ представляют особый интерес: значение $\xi = 0$, соответствующее так называемой минимальной связи, и значение

$$\xi = \frac{1}{4} [(n-2)/(n-1)] \equiv \xi(n) \quad (3.27)$$

для конформной связи. В последнем случае действие и, следовательно, уравнения поля при $m=0$ инвариантны относительно конформных преобразований (3.1), если считать, что поле преобразуется согласно (3.7). Действительно, из (3.5) следует, что если

$$\left[\square + \frac{1}{4} (n-2) R / (n-1) \right] \phi = 0,$$

то

$$\left[\bar{\square} + \frac{1}{4} (n-2) \bar{R} / (n-1) \right] \bar{\phi} = 0.$$

Скалярное произведение (2.9) обобщается следующим образом:

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int_{\Sigma} \phi_1(x) \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} \phi_2^*(x) [-g_{\Sigma}(x)]^{1/2} d\Sigma^{\mu}, \quad (3.28)$$

где $d\Sigma^{\mu} = n^{\mu} d\Sigma$, n^{μ} — направленный в будущее единичный вектор, ортогональный пространственноподобной гиперповерхности Σ , а $d\Sigma$ — элемент объема на Σ . Гиперповерхность Σ выбирается как поверхность Коши в (глобально гиперболическом) пространстве-времени, и можно показать с помощью теоремы Гаусса (см. [287], § 2.8), что значение (ϕ_1, ϕ_2) не зависит от Σ .

Существует полный набор решений $u_i(x)$ уравнения (3.26), ортогональных в смысле скалярного произведения (3.28), т. е. удовлетворяющих соотношениям

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij}, \quad (u_i^*, u_j^*) = -\delta_{ij}, \quad (u_i, u_j^*) = 0. \quad (3.29)$$

Индекс i представляет набор величин, необходимых для различения мод. Поле ϕ может быть разложено аналогично (2.17):

$$\phi(x) = \sum_i [a_i u_i(x) + a_i^{\dagger} u_i^*(x)], \quad (3.30)$$

Ковариантное квантование теории осуществляется наложением коммутационных соотношений (2.18)

$$[a_i, a_j^{\dagger}] = \delta_{ij} \text{ и т. д.} \quad (3.31)$$

Построение вакуумного состояния, пространства Фока и т. д. можно далее проводить точно так же, как это было сделано в случае пространства Минковского в разд. 2.1. Но теперь в формализме возникает внутренняя неоднозначность [221]. В пространстве Минковского существует естественный набор мод, а именно (2.11), который связан с естественной ортогональной системой координат (t, x, y, z) . В свою очередь эти координаты ассоциируются с группой Пуанкаре, оставляющей инвариантным элемент длины в пространстве Минковского. В частности, вектор $\partial/\partial t$ является вектором Киллинга пространства Минковского, ортогональным пространственноподобным гиперповерхностям $t = \text{const}$, а моды (2.11) представляют собой собственные функции этого вектора Киллинга с собственными значениями $-\text{i}\omega$ при $\omega > 0$ (положительно-частотные решения). Вакуум инвариантен относительно группы Пуанкаре.

В искривленном пространстве-времени группа Пуанкаре уже не является группой симметрии (см. в этой связи [469]). Действительно, в общем случае векторы Киллинга, с помощью которых можно было бы определить положительно-частотные решения, вообще не существуют. Для некоторых специальных классов пространств могут существовать симметрии относительно ограниченных преобразований, например вращений, трансляций или группы де Ситтера. В этих случаях могут быть выбраны «естественные» координаты, ассоциируемые с векторами Киллинга, аналогичные галилеевым координатам в пространстве Минковского. Но даже в том случае, когда такие координаты существуют, они не играют в квантовой теории поля той решающей роли, которую играют в пространстве Минковского. В общем же случае такие привилегированные системы координат отсутствуют, и естественного разложения поля ϕ , основанного на разложении переменных в волновом уравнении (3.26) в таких координатах, не существует. В самом деле, основная идея общей теории относительности заключена в принципе общей ковариантности, означающем, что выбор координатных систем не является физически существенным.

Рассмотрим поэтому другой ортонормированный набор решений $\bar{u}_j(x)$. Поле ϕ может быть также разложено по этому набору:

$$\phi(x) = \sum_j [\bar{a}_j \bar{u}_j(x) + \bar{a}_j^\dagger \bar{u}_j^*(x)]. \quad (3.32)$$

Это разложение ϕ определяет новое состояние вакуума $|\bar{0}\rangle$:

$$\bar{a}_j |\bar{0}\rangle = 0, \quad \forall j, \quad (3.33)$$

и новое пространство Фока

Так как оба набора решений полны, новые моды \bar{u}_j могут быть выражены через старые:

$$\bar{u}_j = \sum_i (\alpha_{ji} u_i + \beta_{ji} u_i^*). \quad (3.34)$$

И наоборот,

$$u_i = \sum_j (\alpha_{ji}^* \bar{u}_j - \beta_{ji} \bar{u}_j^*). \quad (3.35)$$

Эти соотношения известны как преобразования Боголюбова [55]. Матричные элементы α_{ij} , β_{ij} называют коэффициентами Боголюбова; с помощью (3.34) и (3.29) они могут быть представлены в виде

$$\alpha_{ij} = (\bar{u}_i, u_j), \quad \beta_{ij} = -(\bar{u}_i, u_j^*). \quad (3.36)$$

Приравнивая разложения (3.30) и (3.32), а также используя (3.34), (3.35) и условие ортонормированности решений (3.29), получаем

$$a_i = \sum_j (\alpha_{ij} \bar{a}_j + \beta_{ji}^* a_j^*), \quad (3.37)$$

$$\bar{a}_j = \sum_i (\alpha_{ji}^* a_i - \beta_{ji} a_i^*). \quad (3.38)$$

Коэффициенты Боголюбова обладают следующими свойствами:

$$\sum_k (\alpha_{ik} \alpha_{jk}^* - \beta_{ik} \beta_{jk}^*) = \delta_{ij}, \quad (3.39)$$

$$\sum_k (\alpha_{ik} \beta_{jk} - \beta_{ik} \alpha_{jk}) = 0. \quad (3.40)$$

Из соотношения (3.37) немедленно следует, что два фоковских пространства, основанные на выборе разных наборов мод u_i и \bar{u}_j , являются различными до тех пор, пока $\beta_{ji} \neq 0$. Например, состояние $|0\rangle$ не уничтожается оператором a_i :

$$a_i |\bar{0}\rangle = \sum_j \beta_{ji} |\bar{1}_j\rangle \neq 0 \quad (3.41)$$

в противоположность (3.33). В действительности математическое ожидание оператора $N_i = a_i^\dagger a_i$ числа частиц моды u_i в состоянии $|0\rangle$ есть

$$\langle \bar{0} | N_i | \bar{0} \rangle = \sum_j |\beta_{ji}|^2, \quad (3.42)$$

т. е. можно сказать, что вакуум мод \bar{u}_j содержит $\sum_j |\beta_{ji}|^2$ частиц моды u_i .

Заметим, что если u_j — положительно-частотные решения по отношению к некоторому времениподобному векторному полю

Киллинга ξ , которые удовлетворяют уравнению

$$\mathcal{L}_\xi u_j = -i\omega u_j, \quad \omega > 0 \quad (3.43)$$

(для сравнения заметим, что (2.8) можно переписать в виде $\mathcal{L}_{\partial_t} u_k = -i\omega u_k$), и \bar{u}_k являются линейными комбинациями только функций u_j (не включая u_j^*), т. е. содержат лишь положительные частоты по отношению к ξ , то коэффициенты $\beta_{jk} = 0$. В этом случае $\bar{a}_k|0\rangle = 0$ и одновременно $a_j|0\rangle = 0$. Следовательно, два набора мод u_j и \bar{u}_k имеют общее вакуумное состояние. Если некоторые из коэффициентов $\beta_{jk} \neq 0$, то \bar{u}_k будет содержать смесь положительно-частотных (u_j) и отрицательно-частотных (u_j^*) решений и частицы будут присутствовать.

В более общем случае фоковское пространство, основанное на $|0\rangle$, может быть связано с пространством, построенным на $|\bar{0}\rangle$ с помощью соотношений, выражающих полноту фоковского базиса:

$$\begin{aligned} |^1n_{i_1}, ^2n_{i_2}, \dots\rangle = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i_1 \dots i_k} |\bar{1}_{i_1}, \bar{1}_{i_2}, \dots, \bar{1}_{i_k}\rangle \langle \bar{1}_{i_1}, \bar{1}_{i_2}, \dots, \bar{1}_{i_k}| \times \\ \times |^1n_{i_1}, ^2n_{i_2}, \dots\rangle. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Например, в используемых обозначениях имеем

$$|^1n_{i_1}\rangle = |1_{i_1}, 1_{i_1}, \dots, 1_{i_1}\rangle / (^1n_{i_1}!)^{1/2},$$

где символ 1_{i_1} повторяется $^1n_{i_1}$ раз. Матричный элемент $\langle \bar{1}_{j_1}, \bar{1}_{j_2}, \dots, \bar{1}_{j_k} | ^1n_{i_1}, ^2n_{i_2}, \dots \rangle$ можно понимать как амплитуду перехода или элемент S -матрицы для перехода из состояния $|^1n_{i_1}, ^2n_{i_2}, \dots\rangle$ в состояние $|\bar{1}_{j_1}, \bar{1}_{j_2}, \dots, \bar{1}_{j_k}\rangle$. Эти матричные элементы S -матрицы могут быть выражены через коэффициенты Боголюбова. В частности, для амплитуд перехода из вакуума в многочастичные состояния находим [156]

$$\langle 0 | 1_{j_1}, 1_{j_2}, \dots, 1_{j_k} \rangle = \begin{cases} i^{k/2} \langle \bar{0} | 0 \rangle \sum_0 \Lambda_{\rho_1 \rho_2} \dots \Lambda_{\rho_{k-1} \rho_k} & k \text{ четное,} \\ 0 & k \text{ нечетное,} \end{cases} \quad (3.45)$$

$$\langle \bar{1}_{j_1}, \bar{1}_{j_2}, \dots, \bar{1}_{j_k} | 0 \rangle = \begin{cases} i^{k/2} \langle \bar{0} | 0 \rangle \sum_0 V_{\sigma_1 \sigma_2} \dots V_{\sigma_{k-1} \sigma_k} & k \text{ четное,} \\ 0 & k \text{ нечетное,} \end{cases} \quad (3.46)$$

где p обозначает все различные перестановки индексов $\{j_1 \dots j_k\}$ и

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij} &= -i \sum_k \beta_{kj} \alpha_{ik}^{-1}, \\ V_{ij} &= i \sum_k \beta_{jk}^* \alpha_{ki}^{-1}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Амплитуды перехода между многочастичными состояниями приведены в работе [48]. Рассмотрение амплитуд перехода вакуум — вакуум мы откладываем до гл. 6.

Помимо векторов состояний частиц и коэффициентов Боголюбова, необходимо построить функции Грина, введенные в разд. 2.7. Будут использоваться те же определения и обозначения, что и в разд. 2.7, с той разницей, что поле $\phi(x)$ теперь удовлетворяет волновому уравнению в искривленном пространстве-времени (3.26), и необходимо соблюдать осторожность в выборе вакуумного состояния $|0\rangle$. Обобщение уравнений для функций Грина (2.73) — (2.75) на случай искривленного пространства осуществляется с помощью (3.26). Например, для фейнмановского пропагатора

$$iG_F(x, x') = \langle 0 | T(\phi(x) \phi(x')) | 0 \rangle \quad (3.48)$$

находим

$$[\square_x + m^2 + \xi R(x)] G_F(x, x') = -[-g(x)]^{-1/2} \delta^n(x - x') \quad (3.49)$$

вместо (2.74). Важно подчеркнуть, что само уравнение (3.49) не определяет вакуумного состояния $|0\rangle$, фигурирующего в (3.48), и не обеспечивает характера решения, как связанного именно с хронологически упорядоченным произведением полей. Для фиксации состояния вакуума и введения хронологического упорядочения на решения уравнения (3.49) необходимо наложить граничные условия. В пространстве Минковского эти граничные условия выражаются в форме выбора контура интегрирования в (2.76). В искривленном пространстве выбор граничных условий не является столь же простой задачей и зависит от глобальных свойств пространства в каждом конкретном случае. (Например, излучение, являющееся «запаздывающим» вблизи источника, перестает быть таковым на некотором расстоянии от него вследствие обратного рассеяния на кривизне пространства-времени.) Детальное обсуждение распространения волн в искривленном пространстве-времени и свойств функций Грина можно найти, например, в работах [158, 216].

3.3. Смысл понятия частиц: детекторы частиц

Возникает естественный вопрос: какой набор мод обеспечивает «наилучшее» описание физического вакуума, т. е. наиболее точно соответствует нашему обычному представлению об отсутствии частиц? Оказывается, что в такой постановке на этот во-

прос ответить нельзя, если не указать конкретный процесс квантового измерения, используемый для обнаружения квантов. В частности, состояние движения измерительного прибора влияет на то, наблюдаются или нет частицы. Например, свободно падающий детектор не всегда будет обнаруживать ту же плотность частиц, что и неинерциальный, ускоренный детектор. В действительности это верно уже в пространстве Минковского: ускоренный детектор будет регистрировать кванты даже в вакуумном состоянии, определенном условием (2.19).

Особенностью пространства Минковского является не то, что для него существует единственное состояние вакуума (это неверно), а то, что обычное вакуумное состояние, определяемое модами (2.11), является истинным вакуумом для *всех инерциальных* наблюдателей во всем пространстве-времени. Причина состоит в том, что вакуум, заданный условием (2.19), инвариантен относительно группы Пуанкаре и таким же свойством обладает множество инерциальных наблюдателей в пространстве Минковского.

Одним из уроков, который удалось извлечь в результате развития квантовой теории поля в искривленном пространстве, было осознание неуниверсальности понятия частиц. Частицы могут регистрироваться одними детекторами и не восприниматься другими, так что суждение о них в известной степени зависит от наблюдателя. Можно, конечно, доказывать существование частиц, но если при этом не уточнять характер движения детектора, то от этого утверждения мало пользы даже в случае пространства Минковского.

Отчасти причина расплывчатости понятия частиц состоит в его *глобальном* характере. Полевые моды определены во всем пространстве-времени (или по крайней мере в широкой области), поэтому разложение поля по модам, соответствующее выбранному наблюдателю, а значит, и оператор числа частиц, описывающий отклик детектора частиц, зависит от всей истории этого наблюдателя в прошлом. Для более объективного отражения состояния поля следует строить величины, определяемые локально, такие, как $\langle \psi | T_{\mu\nu}(x) | \psi \rangle$, принимающие определенное значение в точке x пространства-времени. Тензор энергии-импульса является объективной характеристикой в том смысле, что для заданного состояния $|\psi\rangle$ результаты, даваемые различными измерительными приборами, могут быть связаны между собой с помощью обычных правил преобразования тензоров. Например, если $\langle \psi | T_{\mu\nu}(x) | \psi \rangle = 0$ для одного наблюдателя, то эта величина будет равной нулю и для всех остальных наблюдателей. В противоположность этому один наблюдатель может не детектировать частиц, в то время как другой будет обнаруживать их присутствие.

Во многих интересующих нас задачах пространство-время может считаться асимптотически плоским (пространством Минковского) в отдаленном прошлом и (или) будущем. В этих условиях выбор «естественного» вакуума Минковского, определенного соотношением (2.19), имеет ясный физический смысл: в этом состоянии частицы отсутствуют для *всех инерциальных* наблюдателей в асимптотической области — что и лежит в основе общепринятого представления о вакууме. Отдаленное прошлое и будущее мы будем называть *in*- и *out*-областями соответственно. Эта терминология заимствована из квантовой теории поля в пространстве Минковского, где предполагается, что при $t \rightarrow \pm\infty$ взаимодействие полей исчезает. Здесь аналогично предполагается, что *in*- и *out*-области пространства-времени допускают естественное определение состояний частиц и выделенного вакуумного состояния. Это может быть либо пространство Минковского, либо другое пространство-время, обладающее высокой симметрией, такое, как статическая вселенная Эйнштейна. Ответ на вопрос, имеет ли данное пространство-время подходящие *in*- и *out*-области, зависит и от того, какое именно квантованное поле нас интересует. В случае безмассовых полей с конформной связью этому требованию удовлетворяет конформно-плоское пространство-время, хотя оно и не является статическим (см. § 3.7).

Поскольку используется гейзенберговская картина, то если мы выбираем состояние квантованного поля в *in*-области в качестве вакуумного, это состояние остается неизменным в течение всей последующей эволюции. Однако, как будет показано ниже, в последующие моменты времени, вне *in*-области, свободно падающий детектор частиц может все еще регистрировать частицы в этом вакуумном состоянии. В частности, если имеется также *out*-область, то *in*-вакуум может не совпадать с *out*-вакуумом. В этом случае естественный, например инерциальный, наблюдатель в *out*-области будет обнаруживать присутствие частиц. Поэтому мы можем сказать, что частицы были «рождены» зависящим от времени внешним гравитационным полем. Такое описание особенно полезно, если *in*- и *out*-области представляют собой пространство Минковского, так что все инерциальные наблюдатели в *out*-области обнаруживают присутствие частиц. Аналогичные процессы рождения частиц внешними электромагнитными полями хорошо известны (см., например, [245], где имеются ссылки на более ранние работы). Возможность рождения частиц из-за кривизны пространства-времени обсуждалась более сорока лет назад Шредингером [421]; из других ранних работ отметим работы де Витта [152], Такахашии и Умэдзавы [449] и Имамуры [308]. Впервые строгая трактовка рождения частиц внешним гравитационным полем была дана Паркером [379—381] и Секслем и Урбантке [431, 432].

Для иллюстрации этих соображений рассмотрим модель детектора частиц, предложенную Унру [468] и де Виттом [157]. Детектор представляет собой идеализированную точечную частицу с внутренними уровнями энергии E , связанную монополярным взаимодействием со скалярным полем ϕ . Будем рассматривать случай четырехмерного пространства Минковского.

Предположим, что детектор частиц движется вдоль мировой линии $x^\mu(\tau)$, где τ — собственное время детектора. Взаимодействие детектор — поле описывается лагранжианом $cm(\tau)\phi[x(\tau)]$, где c — малая константа связи, а m — оператор монополярного момента детектора. Предположим, что поле находится в вакуумном состоянии $|0_M\rangle$, заданном условием (2.19), где индекс M обозначает вакуум Минковского. В общем случае произвольной траектории движения детектор не будет оставаться в своем основном состоянии E_0 , а перейдет в возбужденное состояние $E > E_0$, в то время как поле перейдет в возбужденное состояние $|\psi\rangle$. При достаточно малом c амплитуда этого перехода будет определяться первым порядком теории возмущений (см. § 9.1) в виде

$$ic \langle E, \psi | \int_{-\infty}^{\infty} m(\tau) \phi[x(\tau)] d\tau | 0_M, E_0 \rangle.$$

(Пределы интегрирования можно ограничить и меньшим интервалом времени, предполагая, что взаимодействие детектора с полем адиабатически выключается вне этого интервала.)

С помощью уравнения, описывающего временную эволюцию $m(\tau)$:

$$m(\tau) = e^{iH_0\tau} m(0) e^{-iH_0\tau},$$

где $H_0|E\rangle = E|E\rangle$, амплитуда перехода факторизуется, принимая вид

$$ic \langle E | m(0) | E_0 \rangle \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(E-F_0)\tau} \langle \psi | \phi(x) | 0_M \rangle d\tau. \quad (3.50)$$

Если поле ϕ разложено по стандартным плосковолновым модам (2.17), то в этом порядке теории возмущений могут происходить переходы только в состоянии $|\psi\rangle = |1_k\rangle$, содержащее один квант частоты $\omega = (|\mathbf{k}|^2 + m^2)^{1/2}$ для некоторого \mathbf{k} . Тогда (в непрерывной нормировке (2.11))

$$\begin{aligned} \langle 1_k | \phi(x) | 0_M \rangle &= \int d^3k' (16\pi^3\omega')^{1/2} \langle 1_k | a_{\mathbf{k}'}^\dagger | 0_M \rangle e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} + i\omega't} = \\ &= (16\pi^3\omega)^{-1/2} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + i\omega t}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Теперь следует принять во внимание, что \mathbf{x} в (3.51) не является независимой переменной, но определяется траекторией детектора. Предположим, что детектор движется по инерции, т. е.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}t = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}\tau(1 - v^2)^{-1/2}, \quad (3.52)$$

где $\mathbf{x}_0 = \text{const}$, $\mathbf{v} = \text{const}$, $|\mathbf{v}| < 1$; тогда интеграл в (3.50) (при $\psi = |1_k\rangle$ равен

$$\begin{aligned} (16\pi^3\omega)^{-1/2} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(E-E_0)\tau} e^{i\tau(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v})(1-v^2)^{-1/2}} d\tau = \\ = (4\pi\omega)^{-1/2} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_0} \delta(E - E_0 + (\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v})(1-v^2)^{-1/2}) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Но, поскольку $\mathbf{k}\cdot\mathbf{v} \leq |\mathbf{k}||\mathbf{v}| < \omega$ и $E > E_0$, аргумент δ -функции всегда положителен и амплитуда перехода равна нулю. Переход запрещен из соображений сохранения энергии, что является прямым следствием пуанкаре-инвариантности.

Если, с другой стороны, вместо (3.52) выбрана более сложная траектория, то интеграл (3.50) не сводится к δ -функции, и результат отличен от нуля. В таком случае представляет интерес рассчитать вероятность перехода во все возможные состояния $|E\rangle$ и ψ , которая получится, если квадрат модуля (3.50) просуммировать по всем E и по полному набору ψ , что дает

$$c^2 \sum_E |\langle E|m(0)|E_0\rangle|^2 \mathcal{F}(E - E_0), \quad (3.54)$$

где

$$\mathcal{F}(E) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' e^{-iE(\tau-\tau')} G^+(x(\tau), x(\tau')). \quad (3.55)$$

Функция отклика детектора $\mathcal{F}(E)$ не зависит от деталей его устройства и определяется положительно-частотной вайтмановской функцией Грина G^+ , введенной в (2.68). Она описывает море «частиц», которые эффективно действуют на детектор благодаря его движению. Остающийся множитель в (3.54) определяет избирательность детектора и, очевидно, зависит от его внутренней структуры.

Для тех траекторий движения детектора в пространстве Минковского, для которых

$$G^+(x(\tau), x(\tau')) = g(\Delta\tau), \quad (3.56)$$

$$\Delta\tau \equiv \tau - \tau' \quad (3.57)$$

(g — некоторая функция), система инвариантна относительно временных трансляций в системе отсчета детектора ($\tau \rightarrow \tau + \text{const}$). Это означает, что детектор находится в равновесии с

полем ϕ и число частиц, поглощаемых им в единицу времени τ , постоянно. Если скорость поглощения отлична от нуля, то полная вероятность перехода бесконечна, поскольку амплитуда перехода (3.54) подсчитывается для всего бесконечного интервала времени. Это непосредственно видно из (3.55), так как функция Вайтмана зависит только от разности $\tau - \tau'$ и двойной интеграл сводится к произведению фурье-образа двухточечной функции на бесконечный интеграл по времени.

Такая ситуация часто возникает в квантовой теории, и здесь можно использовать адиабатическое выключение взаимодействия при $\tau \rightarrow \pm \infty$ либо вместо этого рассматривать вероятность перехода в единицу собственного времени

$$c^2 \sum_E |\langle E | m(0) | E_0 \rangle|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\tau) e^{-i(E-E_0)\Delta\tau} G^+(\Delta\tau). \quad (3.58)$$

Для упрощения дальнейших примеров ограничимся случаем безмассового скалярного поля ϕ . Тогда положительно-частотная функция Вайтмана может быть найдена из (2.76) с использованием соответствующего контура, показанного на рис. 3:

$$D^+(x, x') = -1/4\pi^2 [(t - t' - i\epsilon)^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2], \quad (3.59)$$

где малую мнимую добавку $i\epsilon$, $\epsilon > 0$, можно интерпретировать, используя соотношение

$$1/(x \mp i\epsilon) = (P/x) \pm i\pi\delta(x). \quad (3.60)$$

В случае инерциального детектора (3.52) равенство (3.59) принимает вид

$$D^+(\Delta\tau) = -1/4\pi^2 (\Delta\tau - i\epsilon)^2 \quad (3.61)$$

(где положительный множитель $(1 - v^2)^{-1/2}$ включен в ϵ) и интеграл в (3.58) может быть вычислен как контурный интеграл с помощью замыкания контура бесконечно удаленной полуокружностью в нижней полуплоскости переменной $\Delta\tau$, так как $E - E_0 > 0$. Поскольку полюс подынтегрального выражения $\Delta\tau = i\epsilon$ находится в верхней полуплоскости, интеграл равен нулю, как и следовало ожидать. Частицы не регистрируются.

В качестве другого примера такого состояния равновесия рассмотрим детектор, движущийся вдоль гиперболической траектории в плоскости (t, z) :

$$x = y = 0, \quad z = (t^2 + \alpha^2)^{1/2}, \quad \alpha = \text{const}, \quad (3.62)$$

с постоянным ускорением α^{-1} в собственной системе отсчета (см., например, [405]). Собственное время детектора τ связано с t соотношением

$$t = \alpha \operatorname{sh}(\tau/\alpha), \quad (3.63)$$

поэтому из (3.59) получаем

$$D^+(\Delta\tau) = - \left[16\pi^2 \alpha^2 \operatorname{sh}^2 \left(\frac{\tau - \tau'}{2\alpha} - \frac{i\varepsilon}{\alpha} \right) \right]^{-1}, \quad (3.64)$$

где некоторая положительная функция τ, τ' включена в ε . Используя соотношение

$$\frac{1}{\sin^2 \pi x} = \pi^{-2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x - k)^{-2}, \quad (3.65)$$

перепишем (3.64) в виде

$$D^+(\Delta\tau) = - (4\pi^2)^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\Delta\tau - 2\pi i\varepsilon + 2\pi i\alpha k)^{-2}. \quad (3.66)$$

Подставляя это выражение в (3.58) и выполняя преобразование Фурье с помощью контурного интегрирования, находим

$$\frac{c^2}{2\pi} \sum_E \frac{(E - E_0) |\langle E | m(0) | E_0 \rangle|^2}{e^{2\pi(E - E_0)\alpha} - 1}. \quad (3.67)$$

Появление планковского множителя $[e^{2\pi(E - E_0)\alpha} - 1]^{-1}$ в (3.67) указывает на то, что равновесие между ускоренным детектором и полем ϕ в состоянии $|0_M\rangle$ имеет такой же характер, как и для инерциального детектора, помещенного в термостат, заполненный тепловым излучением при температуре

$$T = 1/2\pi\alpha k_B = \text{ускорение}/2\pi k_B, \quad (3.68)$$

где k_B — постоянная Больцмана.

К такому же заключению можно прийти и на основании рассмотрения *тепловой* функции Грина для *инерциального* детектора [169]. Выше рассмотрена соответствующая связь для $G_{\beta}^{(1)}$ (2.111) (аналогичный вывод для G_{β}^+ более сложен). Подстановка $x = x' = 0, t = \tau, t' = \tau'$ в (2.111) и использование (2.79) для безмассового поля приводит к выражению

$$D_{\beta}^{(1)}(\Delta\tau) = - (2\pi^2)^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\Delta\tau + ik\beta)^{-2}, \quad (3.69)$$

где особенность понимается в смысле главного значения.

Сравним этот результат с функцией $D^{(1)}$ для ускоренного наблюдателя, движущегося в квантованном поле, находящемся в состоянии *вакуума* Минковского. Она может быть получена из D^+ с помощью соотношения (2.67) в форме

$$D^{(1)}(\Delta\tau) = D^+(\Delta\tau) + D^+(-\Delta\tau).$$

Применяя это соотношение в (3.66) с учетом (3.60), находим

$$D^{(1)}(\Delta\tau) = D_{\beta}^{(1)}(\Delta\tau),$$

где $\beta = 1/k_B T$, а T определено формулой (3.68). Следовательно, вакуумная функция Грина для детектора, движущегося с постоянным ускорением, совпадает с тепловой функцией Грина для инерциального движущегося детектора.

Что это означает физически? Часто утверждают, что равномерно ускоренный наблюдатель будет «видеть» тепловое излучение [128, 468], несмотря на то что поле ϕ находится в вакуумном состоянии $|0_M\rangle$ и инерциальные наблюдатели не регистрируют никаких частиц. Конечно, ускоренный детектор поглощает энергию и переходит в возбужденные состояния так же, как если бы он находился в равновесии с тепловым излучением. Однако, как было установлено в § 2.4, $\langle 0_M | : T_{\mu\nu} : | 0_M \rangle = 0$. Переход к ускоренно движущейся системе отсчета с помощью обычного закона преобразования тензоров также дает $\langle 0_M | : T'_{\mu\nu} : | 0_M \rangle = 0$, поэтому как ускоренный, так и инерциальный наблюдатели согласятся с тем, что тензор энергии-импульса поля ϕ равен нулю. Это привело к употреблению терминов «квази» или «фиктивных» частиц для квантов, возбуждающих ускоренно движущийся детектор, но в действительности это явление скорее указывает на то, что традиционное представление о квантовых частицах применимо лишь при весьма сильных ограничениях.

Если состояние $|0_M\rangle$ не может служить источником энергии, необходимой для возбуждения детектора, как можно примирить его возбуждение с законом сохранения энергии? Более того, переход, который увеличивает энергию детектора от E_0 до E , сопровождается появлением кванта поля $\phi (|0_M\rangle \rightarrow |1_k\rangle)$. Это значит, что и детектор, и поле *одновременно* приобретают энергию.

Для объяснения этого кажущегося противоречия следует рассмотреть воздействие ускорения на сам детектор. Когда детектор ускоряется, его взаимодействие с полем ϕ вызывает *излучение* квантов, которые создают силу реакции, направленную против ускоряющей силы. Работа, производимая внешней силой на преодоление этого сопротивления, обеспечивает недостающую энергию, которая передается полю посредством испускаемых детектором квантов, а также детектору, одновременно испытывающему переходы вверх. В целом же, если интересоваться состоянием детектора, суммарным эффектом является поглощение квантов, распределенных по тепловому закону.

Возвращаясь к проблеме определения вакуумного состояния и фоковского пространства, следует задуматься, существуют ли доводы в пользу того, что такие определения для ускоренных систем могут претендовать на ту же роль, что и традиционные построения в пространстве Минковского? В ответ можно было бы возразить, что связывать эти понятия с ускоренными системами неправомерно ввиду того выделенного положения, которое

занимают инерциальные наблюдатели в большинстве физических теорий. Следовательно, что касается пространства Минковского, то вакуумное состояние $|0_M\rangle$ является сильнейшим претендентом на роль «правильного» или «физического» вакуума — наблюдения же из ускоренных систем отсчета «искажены» вследствие неравномерного движения последних. Трудность в том, что при наличии гравитационных полей инерциальные наблюдатели становятся свободно падающими, и, вообще говоря, не существует двух различных свободно падающих наблюдателей, для которых вакуум был бы одним и тем же. Лишь в исключительных случаях пространств с высокой степенью симметрии существует некоторое множество траекторий детекторов, которые не регистрируют частиц, причем они могут и не являться свободно падающими (например, ускоренные наблюдатели, находящиеся в стационарном режиме вблизи сферической звезды, см. разд. 8.4).

Нетрудно обобщить формулу, описывающую показания детектора, на случай искривленного пространства-времени, заменив G^+ соответствующей величиной для искривленного пространства (см. с. 54), а вакуумное состояние $|0_M\rangle$ — некоторым вакуумом более общего вида. Примеры будут даны в разд. 3.6 и 3.7.

Интересно также рассмотреть случай, когда квантовое поле находится не в вакуумном, а в многочастичном состоянии (2.22) (или аналогичном состоянии в искривленном пространстве). В этом случае G^+ следует заменить на

$$\begin{aligned} \langle {}^1n_{k_1}, {}^2n_{k_2}, \dots, {}^ln_{k_l} | \phi(x) \phi(x') | {}^1n_{k_1}, {}^2n_{k_2}, \dots, {}^ln_{k_l} \rangle = \\ = G^+(x, x') + \sum_i {}^in u_{k_i}(x) u_{k_i}^*(x') + \sum_i {}^in u_{k_i}^*(x) u_{k_i}(x'). \end{aligned} \quad (3.70)$$

При переходе к непрерывному спектру правая часть (3.70) принимает вид

$$G^+(x, x') + \int d^{n-1}k n_k u_k(x) u_k^*(x') + \int d^{n-1}k n_k u_k^*(x) u_k(x'), \quad (3.71)$$

где n_k — плотность квантов в k -пространстве.

Для инерциального детектора, движущегося вдоль траектории (3.52) в n -мерном пространстве Минковского, лишь последний член в (3.71) дает вклад в функцию отклика детектора (3.55):

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}(E)}{T} = (2\pi)^{1-n} \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\tau) e^{-iE\Delta\tau} \int \frac{d^{n-1}k}{2\omega} \times \\ \times \exp[i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})\Delta\tau (1 - v^2)^{-1/2}] n_k, \end{aligned} \quad (3.72)$$

где T — полное время, в течение которого детектор остается включенным. Если $v = 0$, то интегрирование по $\Delta\tau$ дает $2\pi\delta(E - \omega)$. Если к тому же кванты распределены изотропно, то $n_k = n_k$ и интегрирование по $d^{n-1}k$ приводит к выражению

$$\frac{\mathcal{F}(E)}{T} = \frac{2^{2-n}\pi^{(3-n)/2}}{\Gamma((n-1)/2)} (E^2 - m^2)^{(n-3)/2} n_{(E^2 - m^2)^{1/2}} \theta(E - m). \quad (3.73)$$

При подстановке (3.73) в (3.54) следует обратить внимание на функцию $\theta(E - E_0 - m)$, которая показывает, что поглощение детектором единичного кванта массы m не может происходить до тех пор, пока расстояние между уровнями энергии детектора $E - E_0$ не станет по крайней мере равным энергии покоя частицы m . Из (3.73) следует также, что скорость квантовых переходов, испытываемых детектором в море квантов, пропорциональна числу квантов интересующей нас моды, чего и можно было ожидать на основании физических соображений. Но зависимость от энергии сложным образом связана со спектром частиц и дополнительно усложняется из-за избирательности детектора (энергетической зависимости матричного элемента в (3.54)).

При $v \neq 0$ сначала следует проинтегрировать в (3.72) по углам. Затем интегрирование по τ дает разность двух θ -функций (а не δ -функцию), ограничивающую область интегрирования по dk . В четырехмерном безмассовом случае получаем

$$\frac{\mathcal{F}(E)}{T} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1 - v^2}{v^2} \right)^{1/2} \int_{E^-}^{E^+} n_k dk, \quad (3.74)$$

где $E^\pm = E[(1 \pm v)/(1 \mp v)]^{1/2}$. Это выражение легко истолковать физически. При движении детектора в изотропном поле излучения некоторый переход с энергией $E - E_0$ будет отвечать квантам не одной моды, а целой области, начиная от испытывающих голубое смещение, низкочастотных квантов, движущихся в направлении вперед, до испытывающих красное смещение квантов более высокой частоты, движущихся в направлении назад. В величинах $[(1 + v)/(1 - v)]^{1/2}$ и $[(1 - v)/(1 + v)]^{1/2}$ нетрудно узнать обычные доплеровские множители голубого и красного смещения соответственно, и, следовательно, функция отклика пропорциональна полному числу квантов в области резонансных частот в пределах доплеровского уширения.

Учитывая неопределенность представления о частицах в более общих случаях, следует выяснить, какой смысл можно придать коэффициентам Боголюбова α и β , введенным в предыдущей главе, в частности, что подразумевается под математическим ожиданием числа квантов моды i , даваемым выражением (3.42).

Вообще говоря, *не существует* простого соотношения между $\langle N_i \rangle$ и числом частиц, измеряемым некоторым детектором, даже свободно падающим. Однако в одном частном случае такое соотношение имеется. Рассмотрим пространство-время, асимптотически статическое в отдаленном прошлом и будущем, и построим вакуумное состояние в *in*-области, связывая его со стандартными плоско-волновыми модами типа (2.11). Это обычное физическое состояние без частиц, и инерциальный наблюдатель, конечно, не будет обнаруживать кванты в *in*-области.

Конечно, если пространство-время является статическим лишь в асимптотических областях, верхние пределы в интегралах (3.55), строго говоря, уже нельзя считать бесконечными. Мы делаем предположение, что монопольное взаимодействие детектора адиабатически выключается до того, как детектор входит в нестатическую область. Подобным же образом в *out*-области детектор будет адиабатически включаться после прекращения движений пространства-времени. Это позволяет нам по-прежнему использовать в качестве пределов $\pm\infty$, как если бы пространство-время было всюду статическим. Как уже отмечалось, предположения такого рода — ограничение взаимодействия конечным временем с помощью адиабатического выключения — обычны для квантовой теории, и до тех пор, пока время взаимодействия много больше, чем $(E - E_0)^{-1}$, возбуждение детектора самим процессом выключения можно считать пренебрежимо малым.

В *out*-области *in*-моды, вообще говоря, уже не будут плоскими волнами определенной частоты типа (2.11). Что же тогда будет регистрировать детектор в *out*-области, если поле находится в состоянии *in*-вакуума? Ясно, что инерциальный детектор не будет обнаруживать частиц, если поле находится в состоянии *out*-вакуума, ассоциируемого с модами вида (2.11) в *out*-области. Однако он будет регистрировать присутствие квантов, если поле находится в состоянии *in*-вакуума.

Для того чтобы выяснить, что будет регистрировать детектор, нужно проанализировать (в связи с равенством (3.55)) функцию Вайтмана G^+ (построенную с использованием *in*-вакуума) в *out*-области. Как правило, она оказывается сложной функцией пространственных переменных x, x' . Однако в простом случае однородной вселенной, такой, как асимптотически статическая пространственно-плоская модель Робертсона — Уокера, функция G^+ будет инвариантна относительно пространственных трансляций и вращений. Ограничим обсуждение этим простым случаем.

Если *in*-моды обозначить через u_k^{in} , а *in*-вакуум — через $|0, \text{in}\rangle$, то

$$G_{\text{in}}^+(x, x') = \langle \text{in}, 0 | \phi(x) \phi(x') | 0, \text{in} \rangle = \int u_k^{\text{in}}(x) u_k^{\text{in}*}(x') d^{n-1}k, \quad (3.75)$$

где обе точки x и x' находятся в out-области. Обозначая out-моды (т. е. моды, которые редуцируются к стандартным плоским волнам (2.11) в out-области) через u_k^{out} , можно использовать (3.34) для разложения u_k^{in} по функциям u_k^{out} . Благодаря пространственной однородности оба набора мод u_k^{out} и u_k^{in} будут оставаться плоскими волнами (т. е. $\sim e^{ik \cdot x}$) всюду, хотя и с другой зависимостью от времени. Поэтому скалярные произведения $(u_k^{\text{in}}, u_{k'}^{\text{out}})$ и $(u_k^{\text{in}}, u_{k'}^{\text{out}*})$ будут пропорциональны $\delta_{kk'}$ и $\delta_{-kk'}$ соответственно (см. (3.28)). Из (3.36) следует, что преобразование Боголюбова будет диагональным и изотропным, т. е. имеет вид

$$\alpha_{kk'} = \alpha_k \delta_{kk'}, \quad (3.76)$$

$$\beta_{kk'} = \beta_k \delta_{-kk'}, \quad (3.77)$$

где $k = |\mathbf{k}|$, так что

$$u_k^{\text{in}}(x) = \alpha_k u_k^{\text{out}}(x) + \beta_k u_{-k}^{\text{out}*}(x). \quad (3.78)$$

Подстановка (3.78) в (3.75) дает

$$G_{\text{in}}^+ = \int d^{n-1}k \left[|\alpha_k|^2 \bar{u}_k^{\text{out}}(x) u_k^{\text{out}*}(x') + \alpha_k \beta_k^* u_k^{\text{out}}(x) u_{-k}^{\text{out}}(x') + \right. \\ \left. + \beta_k \alpha_k^* u_{-k}^{\text{out}*}(x) u_k^{\text{out}*}(x') + |\beta_k|^2 u_{-k}^{\text{out}*}(x) u_{-k}^{\text{out}}(x') \right]. \quad (3.79)$$

Анализ выражения (3.79) показывает, что, поскольку u_k имеет зависимость вида $e^{ik \cdot x}$, функция G^+ зависит от координат только через разность $x - x'$, т. е., как и ожидалось, инвариантна относительно пространственных трансляций. Отсюда сразу следует, что, если x и x' ограничены инерциальными траекториями детектора (3.52), зависимость G^+ от координат исчезает. Поэтому отклик детектора (3.55) не зависит от его положения, чего и следовало ожидать из соображений однородности.

В out-области u_k^{out} -моды представляют собой обычные плоские волны, поэтому интегрирование по τ и τ' в (3.55) выполняется сразу и дает δ -функции. Единственный не исчезающий вклад дает последний член в (3.79).

Функция отклика детектора в единицу времени принимает вид

$$\frac{\mathcal{F}(E)}{T} = \frac{2^{2-n} \pi^{(3-n)/2}}{\Gamma((n-1)/2)} \int_0^\infty \frac{dk k^{n-2}}{(k^2 + m^2)^{1/2}} |\beta_k|^2 \delta(E - (k^2 + m^2)^{1/2}) = \\ = \frac{2^{2-n} \pi^{(3-n)/2}}{\Gamma((n-1)/2)} (E^2 - m^2)^{(n-3)/2} |\beta_{(E^2 - m^2)^{1/2}}|^2 \theta(E - m), \quad (3.80)$$

где для простоты мы ограничились случаем скорости детектора $v = 0$ и выбрали масштабный множитель Робертсона — Уокера в out-области равным единице. Эта функция отклика не

отличается от функции отклика детектора в изотропном море квантов с $|\beta_k|^2$ частицами моды k в статическом пространстве-времени, что устанавливается путем сравнения (3.80) с (3.73).

Простой вид этого результата делает вполне убедительной интерпретацию $|\beta_k|^2$ как числа частиц моды k , рождаемых в ходе космологической эволюции. Конечно, использование детектора не единственный критерий, с помощью которого устанавливается физическая разумность этой интерпретации. Вычисление $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ также выявляет в out-области наличие энергии, соответствующей $|\beta_k|^2$ частицам моды k в статическом пространстве-времени.

3.4. Космологическое рождение частиц: простой пример

Для того чтобы проследить, как практически может происходить рождение частиц в пространстве-времени, являющемся пространством Минковского в in и out-областях, рассмотрим простой пример двумерной вселенной Робертсона — Уокера с элементом длины

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) dx^2, \quad (3.81)$$

пространственные сечения которой однородно расширяются (или сжимаются) в соответствии с поведением единственной скалярной функции $a(t)$. Определяя новый временной параметр (так называемое конформное время) соотношением $d\eta = dt/a$, так что

$$t = \int dt' = \int_0^\eta a(\eta') d\eta', \quad (3.82)$$

можно переписать (3.81) в виде

$$ds^2 = a^2(\eta) (d\eta^2 - dx^2) = C(\eta) (d\eta^2 - dx^2), \quad (3.83)$$

где введен «конформный масштабный множитель» $C(\eta) = a^2(\eta)$. В этой форме элемент длины имеет явно конформно-плоский вид (см. разд. 3.1).

Предположим, что

$$C(\eta) = A + B \operatorname{th} \rho \eta, \quad A, B, \rho = \text{const}; \quad (3.84)$$

тогда в отдаленном прошлом и будущем пространство-время становится плоским, поскольку

$$C(\eta) \rightarrow A \pm B, \quad \eta \rightarrow \pm \infty$$

(рис. 7). Рассмотрим рождение массивных минимально связанных скалярных частиц в этом пространстве-времени (это было впервые сделано Бернардом и Дунканом [34]). Заметим, что

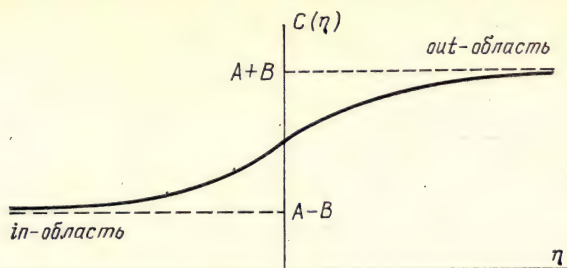


Рис. 7. Конформный масштабный множитель $C(\eta) = A + B \operatorname{th} \rho \eta$ описывает асимптотически статическую вселенную, претерпевающую гладкое расширение в промежуточной области.

в пространстве двух измерений минимальная и конформная связи эквивалентны (см. (3.27)).

Поскольку $C(\eta)$ не зависит от пространственной переменной x , пространственные трансляции являются преобразованиями симметрии; поэтому для скалярных мод в (3.30) переменные разделяются:

$$u_k(\eta, x) = (2\pi)^{-1/2} e^{ikx} \chi_k(\eta). \quad (3.85)$$

Подставляя (3.85) вместо ϕ в уравнение (3.26) для скалярного поля с $\xi = 0$ и метрикой (3.83), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для $\chi_k(\eta)$:

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \chi_k(\eta) + (k^2 + C(\eta) m^2) \chi_k(\eta) = 0. \quad (3.86)$$

Это уравнение можно решить с помощью гипергеометрических функций. Нормированные моды, которые ведут себя как положительно-частотные моды (2.11) пространства Минковского в отдаленном прошлом ($\eta, t \rightarrow -\infty$), имеют вид

$$\begin{aligned} u_k^{\text{in}}(\eta, x) &= (4\pi\omega_{\text{in}})^{-1/2} \exp\{ikx - i\omega_+\eta - (i\omega_-/\rho) \ln[2 \operatorname{ch}(\rho, \eta)]\} \times \\ &\times {}_2F_1\left(1 + (i\omega_-/\rho), i\omega_-/\rho; 1 - (i\omega_{\text{in}}/\rho); \frac{1}{2}(1 + \operatorname{th} \rho \eta)\right) \xrightarrow{\eta \rightarrow -\infty} \\ &\xrightarrow{\eta \rightarrow -\infty} (4\pi\omega_{\text{in}})^{-1/2} e^{ikx - i\omega_{\text{in}}\eta}, \end{aligned} \quad (3.87)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_{\text{in}} &= [k^2 + m^2(A - B)]^{1/2}, \quad \omega_{\text{out}} = [k^2 + m^2(A + B)]^{1/2}, \\ \omega_{\pm} &= \frac{1}{2}(\omega_{\text{out}} \pm \omega_{\text{in}}). \end{aligned} \quad (3.88)$$

С другой стороны, моды, которые ведут себя как положительно-частотные в пространстве Минковского при $\eta \rightarrow +\infty$,

оказываются равными

$$u_k^{\text{out}}(\eta, x) = (4\pi\omega_{\text{out}})^{-1/2} \exp\{ikx - i\omega_+\eta - (i\omega_-/\rho) \ln[2 \operatorname{ch}(\rho\eta)]\} \times \\ \times {}_2F_1\left(1 + (i\omega_-/\rho), i\omega_-/\rho; 1 + (i\omega_{\text{out}}/\rho); \frac{1}{2}(1 - \operatorname{th}\rho\eta)\right) \xrightarrow{\eta \rightarrow +\infty} \\ \xrightarrow{\eta \rightarrow +\infty} (4\pi\omega_{\text{out}})^{-1/2} e^{ikx - i\omega_{\text{out}}\eta}. \quad (3.89)$$

Очевидно, что u_k^{in} и u_k^{out} не совпадают; это означает, что коэффициент Боголюбова β в (3.34) должен быть не равным нулю. Чтобы убедиться в этом явно, можно воспользоваться свойствами гипергеометрических функций при линейных преобразованиях (см., например, [2], (15.3.6), (15.3.3)), чтобы выразить u_k^{in} через u_k^{out} (ср. (3.78)) следующим образом:

$$u_k^{\text{in}}(\eta, x) = \alpha_k u_k^{\text{out}}(\eta, x) + \beta_k u_{-k}^{\text{out}*}(\eta, x), \quad (3.90)$$

где

$$\alpha_k = \left(\frac{\omega_{\text{out}}}{\omega_{\text{in}}}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(1 - (i\omega_{\text{in}}/\rho)) \Gamma(-i\omega_{\text{out}}/\rho)}{\Gamma(-i\omega_+/\rho) \Gamma(1 - (i\omega_+/\rho))}, \quad (3.91)$$

$$\beta_k = \left(\frac{\omega_{\text{out}}}{\omega_{\text{in}}}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(1 - (i\omega_{\text{in}}/\rho)) \Gamma(i\omega_{\text{out}}/\rho)}{\Gamma(i\omega_-/\rho) \Gamma(1 + (i\omega_-/\rho))}. \quad (3.92)$$

Сравнение (3.90) с (3.34) приводит к выражениям для боголюбовских коэффициентов (ср. (3.76), (3.77))

$$\alpha_{kk'} = \alpha_k \delta_{kk'}, \quad \beta_{kk'} = \beta_k \delta_{-kk'}. \quad (3.93)$$

Из (3.91) и (3.92) находим

$$|\alpha_k|^2 = \frac{\operatorname{sh}^2(\pi\omega_+/\rho)}{\operatorname{sh}(\pi\omega_{\text{in}}/\rho) \operatorname{sh}(\pi\omega_{\text{out}}/\rho)}, \quad (3.94)$$

$$|\beta_k|^2 = \frac{\operatorname{sh}^2(\pi\omega_-/\rho)}{\operatorname{sh}(\pi\omega_{\text{in}}/\rho) \operatorname{sh}(\pi\omega_{\text{out}}/\rho)}, \quad (3.95)$$

откуда немедленно следует (см. (3.39)) соотношение нормировки

$$|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1. \quad (3.96)$$

Рассмотрим случай, когда квантованное поле находится в состоянии $|0, \text{in}\rangle$, определяемом (3.33) в терминах мод u_k^{in} (отождествляемых с модами \bar{u}_k , разд. 3.2). В отдаленном прошлом, когда пространство-время было плоским, все инерциальные детекторы указывали на отсутствие частиц, так что неускоренные наблюдатели должны были идентифицировать это квантовое состояние как физический вакуум.

В out-области ($\eta \rightarrow +\infty$) пространство-время также плоское, а квантованное поле также находится в состоянии $|0, \text{in}\rangle$ (используем гейзенберговскую картину движения), но в противоположность ситуации в in-области состояние $|0, \text{in}\rangle$ не будет восприниматься инерциальными наблюдателями в out-области как физический вакуум; эта роль принадлежит состоянию $|0, \text{out}\rangle$, определенному в терминах мод u_k^{out} . Действительно, неускоренные детекторы частиц в этой области будут обнаруживать присутствие квантов (см. (3.80)). Ожидаемое число квантов моды k дается формулой (3.95). Поэтому такую эволюцию квантовой системы можно назвать рождением частиц моды k вследствие космологического расширения.

3.5. Адиабатический вакуум

Результаты предыдущего раздела нетрудно истолковать в более наглядных физических терминах. В безмассовом пределе $\omega \rightarrow 0$ правая часть (3.95) обращается в нуль: рождения частиц нет. Это пример конформно тривиальной ситуации — конформно-инвариантного поля в пространстве-времени, конформном пространству Минковского (см. разд. 3.1). Рождение частиц происходит лишь тогда, когда конформная симметрия нарушена наличием массы, задающей в теории масштаб длины. Процесс рождения можно рассматривать как результат воздействия расширения пространства-времени на квантованное поле через массу. Изменяющееся гравитационное поле подпитывает энергией возмущенные скалярные моды.

Если рождение квантов поля приписывать изменяющемуся гравитационному полю, то кажется естественным считать, что частицы появляются в течение периода расширения. Ясно, что частицы не рождаются в асимптотически статических областях. Более того, если (3.95) дает конечную плотность для частиц, которые отсутствовали в in-области, то можно ожидать, что измерение в промежуточный момент времени в период расширения даст плотность частиц где-то между нулем и значением (3.95).

К сожалению, эти представления не оправдываются при более тщательном рассмотрении. Как было объяснено в разд. 3.3, в искривленном пространстве-времени, вообще говоря, не существует естественного определения понятия частиц. Тем не менее благодаря симметрии пространства-времени Робертсона — Уокера в нем можно ввести привилегированный класс наблюдателей, а именно сопутствующих наблюдателей, которые видят вселенную расширяющейся строго изотропно. Поэтому возникает желание идентифицировать частицы в период расширения с возбуждениями сопутствующих детекторов

частиц. Этот аспект проблемы будет рассмотрен в следующем разделе.

Но, даже если можно ввести специальное определение понятия частиц на основе соображений симметрии, как это предложено выше, число частиц не будет постоянным, что делает процесс измерения этой величины внутренне неопределенным. Если средняя скорость рождения частиц в интервале Δt равна A , то для точного измерения числа частиц нужно выбрать Δt таким, чтобы $|A|\Delta t \ll 1$. Но существует еще неопределенность числа частиц $(m\Delta t)^{-1}$, обусловленная соотношением неопределенностей Гейзенберга. Таким образом, полная неопределенность числа частиц при измерении за время Δt [381]

$$\Delta N \gtrsim (m\Delta t)^{-1} + |A|\Delta t.$$

Последняя величина имеет минимальное значение $2(|A|/m)^{1/2}$ при $\Delta t = (m|A|)^{-1/2}$. Если $|A| \neq 0$ или $m \neq \infty$, эта внутренняя неопределенность числа N не обращается в нуль.

Но успешное применение квантовой теории поля в пространстве Минковского говорит о том, что в искривленном пространстве-времени должно существовать некоторое приближение, в котором понятие частиц «почти осмысленно»; в конце концов мы живем в расширяющейся вселенной. Приведенные выше физические аргументы подсказывают, что если скорость рождения частиц мала, или их масса велика, то представление об определенном числе частиц становится полезным.

Как можно придать этим соображениям более точный смысл?

Плотность частиц и скорость их рождения, очевидно, зависят от скорости расширения. В пределе очень медленного расширения можно ожидать уменьшения скорости рождения до нуля в соответствии с результатом теории в пространстве Минковского. Из (3.95) видно, что $|\beta_k|^2 \sim B^2 \rightarrow 0$, если *полное расширение* (т. е. полное изменение радиуса пространства) стремится к нулю, чем обеспечивается переход к пространству Минковского. Но рождение частиц прекращается гораздо быстрее, если *скорость* расширения стремится к нулю. Скорость расширения в нашем случае определяется параметром ρ , и при $\rho \rightarrow 0$ имеет место экспоненциальное спадание

$$|\beta_k|^2 \rightarrow e^{-2\pi\omega_{\text{in}}/\rho} \rightarrow 0. \quad (3.97)$$

Соответствующий параметр «медленности» ρ/ω_{in} становится малым, если $\rho \ll k$ или m . Это условие вполне физически. Следует ожидать, что расширение будет возбуждать полевые моды, для которых ω меньше или порядка скорости расширения. Для значений ω , существенно превышающих эту величину, рождение частиц экспоненциально подавлено. Таким образом, моды с высокими k возбуждаются весьма незначи-

тельно. Аналогично рождение частиц большой массы экспоненциально мало, поскольку для создания массы покоя необходимо отобрать от гравитационного поля большую энергию.

Столь сильное подавление рождения квантов с большими k или m означает, что в out-области ($\eta \rightarrow \infty$) инерциальные детекторы частиц будут регистрировать кванты высокоэнергетических мод лишь крайне редко. Поле, находящееся в состоянии вакуума при $\eta \rightarrow -\infty$ для всех мод, остается в «почти» вакуумном состоянии для высокоэнергетических мод. Чем медленнее расширение в промежуточной стадии, тем больше вероятность того, что данная мода не будет содержать частиц. Так как эта вероятность уменьшается с энергией экспоненциально при больших k и m , приближение, в котором рождением частиц пренебрегается, с ростом энергии становится все более точным.

Если высокоэнергетическая in-мода остается вакуумной с большой вероятностью в out-области, то кажется очевидным, что она должна быть вакуумной и в промежуточной области (в период расширения). Но, чтобы придать этому утверждению строгий смысл, необходимо уточнить движение детектора частиц. В следующем разделе мы покажем, что *сопутствующий* детектор действительно в течение промежуточной фазы расширения почти не регистрирует квантов, принадлежащих высокоэнергетическим модам.

Эти замечания, основанные на примере, рассмотренном в предыдущем разделе, остаются справедливыми для любого пространства-времени Робертсона — Уокера с гладким (C^∞) масштабным фактором $S(\eta)$. В частности, быстрое прекращение рождения частиц при m или $k \rightarrow \infty$ представляет собой общую закономерность.

В случае модельной вселенной Робертсона — Уокера со статическими in- и out-областями ситуация ясна. Если в качестве состояний квантованного поля выбраны вакуумные in- или out-состояния, то сопутствующий детектор частиц почти не будет регистрировать высокоэнергетических квантов вдоль всей своей мировой линии. До тех пор пока частота моды много больше, чем скорость расширения, вероятность нулевого отклика детектора будет оставаться очень близкой к единице. Но для низших мод кванты будут регистрироваться, что сигнализирует о нарушении приближения, в котором состояние поля понимается как вакуумное. (Аналогичные замечания относятся и к случаю, когда поле выбирается в многочастичном in- или out-состоянии.) Более того, поскольку вакуумные состояния in и out ведут себя в этом смысле одинаково, любая линейная комбинация этих состояний будет давать такие же предсказания относительно поведения детектора.

Если статических in- и out-областей нет, то приближенное

определение понятия частиц не может основываться на таком построении. Вместо этого следует указать метод выбора тех из точных модовых решений уравнений поля, которые в определенном смысле наиболее близки к соответствующим решениям в пределе пространства Минковского. Физически это можно себе представить как построение минимального возмущения поля при расширении, приводящее к такому определению частиц, при котором рождение частиц при изменении геометрии минимально. Такое построение было дано Паркером [379—383] и в дальнейшем развито в работах [36, 75, 76, 223, 225, 302, 303, 350].

Для придания этим соображениям точного математического смысла необходимо провести разложение полевых мод, справедливое при больших массах. Здесь мы рассмотрим случай конформного скалярного поля в пространственно-плоских моделях Робертсона — Уокера. Более общий случай исследовался в цитированных выше работах.

Элемент длины в рассматриваемом пространстве имеет вид

$$ds^2 = C(\eta) \left[d\eta^2 - \sum_i (dx^i)^2 \right], \quad (3.98)$$

где предполагается, что $C(\eta)$ — функция класса C^∞ конформного времени η . В силу однородности пространственных сечений методом разделения переменных можно найти решения для волновых мод

$$u_k = (2\pi)^{(1-n)/2} C^{(2-n)/4}(\eta) e^{ik \cdot x} \chi_k(\eta), \quad (3.99)$$

где $k = |\mathbf{k}|$. Для конформного поля функция χ_k удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \chi_k(\eta) + \omega_k^2(\eta) \chi_k(\eta) = 0, \quad (3.100)$$

где

$$\omega_k^2(\eta) = k^2 + C(\eta) m^2. \quad (3.101)$$

Уравнение (3.100) напоминает классическое уравнение для гармонического осциллятора с частотой, зависящей от времени, например для математического маятника, длина подвеса которого медленно укорачивается, вызывая изменение периода колебаний. В терминах квантовой теории ясно, что энергия E кванта колебаний ($h\nu$) недостаточна для формирования нового кванта при возрастании частоты ν . Действительно, Эйнштейн показал, что если длина маятника уменьшается бесконечно медленно, то E/ν является адиабатическим инвариантом, и число квантов сохраняется независимо от полного изменения длины маятника (см., например, [106]).

В космологической задаче мы покажем, что подобным же образом число квантов (т. е. число частиц) является адиабатическим инвариантом независимо от *полной величины* космоло-

гического расширения, если скорость расширения бесконечно мала.

Уравнение (3.100) имеет формальное ВКБ-решение

$$\chi_k = (2W_k)^{-1/2} \exp \left[-i \int_{\eta} W_k(\eta') d\eta' \right], \quad (3.102)$$

где функция W_k удовлетворяет нелинейному уравнению

$$W_k^2(\eta) = \omega_k^2(\eta) - \frac{1}{2} \left(\frac{\ddot{W}_k}{W_k} - \frac{3}{2} \frac{\dot{W}_k^2}{W_k^2} \right). \quad (3.103)$$

В выражении (3.102) неявно присутствует произвольный фазовый множитель, который можно задать выбором нижнего предела интегрирования.

Если пространство-время эволюционирует медленно, то члены с производными в (3.103) будут малы по сравнению с ω_k^2 , поэтому в нулевом приближении можно в подинтегральном выражении (3.102) положить

$$W_k^{(0)}(\eta) = \omega_k(\eta). \quad (3.104)$$

Это решение, очевидно, сводится к стандартным модам пространства Минковского, поскольку $C(\eta) \rightarrow \text{const}$.

Решения уравнения (3.103) могут быть получены с помощью итераций, причем $W_k^{(0)}$ выбирается в качестве нулевого приближения ([73], этот прием эквивалентен методу Лиувилля [431], см. также [105]). Для выявления характера «медленности» удобно ввести параметр адиабатичности T . Если временно заменить η на η/T (полагая $T = 1$ в конце вычисления), то адиабатический предел медленного расширения можно исследовать, рассмотрев, что происходит при $T \rightarrow \infty$.

Воспользовавшись этим приемом, можно переписать (3.100) в виде

$$\frac{d^2 \chi(\eta_1)}{d\eta_1^2} + T^2 \omega_k^2(\eta_1) \chi_k(\eta_1) = 0, \quad (3.105)$$

где $\eta_1 = \eta/T$. Очевидно,

$$\frac{d}{d\eta} C(\eta/T) = \frac{1}{T} \frac{d}{d\eta_1} C(\eta_1), \quad (3.106)$$

так что в пределе $T \rightarrow \infty$ функция $C(\eta_1)$ и все ее производные по η изменяются бесконечно медленно. Таким образом, можно воспроизвести влияние медленного изменения $C(\eta)$, рассматривая приближение больших T .

В разложении по обратным степеням T член, пропорциональный T^{-n} , будет называться членом n -го адиабатического

порядка. Из (3.106) ясно, что адиабатический порядок эквивалентен числу производных от C . Из соображений размерности следует, что если некоторая величина имеет размерность m^d , то член адиабатического порядка A в ее разложении будет содержать $A - d$ степеней m^{-1} и k^{-1} .

Следующая итерация в (3.103) дает

$$(W_k^2)^2 = \omega_k^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\ddot{\omega}_k}{\omega_k} - \frac{3}{2} \frac{\dot{\omega}_k^2}{\omega_k^2} \right), \quad (3.107)$$

куда входят две производные от ω_k и, следовательно, от C , так что это член второго адиабатического порядка в приближении медленных движений. A -я итерация дает член адиабатического порядка $2A$. (При подстановке $W_k^{(2)}$ в (3.102) с целью получения разложения до второго порядка в разложении квадратного корня из выражения (3.107) необходимо удерживать члены также до второго порядка по адиабатическому параметру.) Ниже мы будем обозначать A -й порядок разложения по адиабатическому параметру через $\chi_k^{(A)}$, а соответствующие моды (3.99) — через $u_k^{(A)}$.

Предположим, что вместо точного решения χ_k , задаваемого формулой (3.102), использовано адиабатическое приближение нулевого порядка, получаемое заменой W_k на $W_k^{(0)}$. В in -области, в которой пространство является статическим, оба выражения приводят к обычным решениям уравнения с постоянной частотой в пространстве Минковского. По мере расширения вселенной точное и приближенное решения перестают быть совпадающими, но различие будет проявляться только в членах второго порядка по адиабатическому параметру, и это остается справедливым, сколь бы сильно ни расширилась вселенная.

В качестве иллюстрации рассмотрим закон расширения

$$C(\eta) = 1 + e^{a\eta}, \quad a = \text{const}, \quad \eta < 0, \quad (3.108)$$

для которого существует асимптотически статическая in -область и далее следует период расширения. Точное решение, сводящееся к обычному положительно-частотному решению для пространства Минковского в отдаленном прошлом, имеет вид [37]

$$\chi_k = \frac{\Gamma(1 - (2i\omega_k^-/a))}{(2\omega_k^-)^{1/2}} \left(\frac{m}{a} \right)^{2i\omega_k^-/a} J_{-2i\omega_k^-/a}(e^{a\eta/2}), \quad (3.109)$$

где J — функция Бесселя и $\omega_k^- = \omega_k(-\infty) = (k^2 + m^2)^{1/2}$. С другой стороны, адиабатическое решение нулевого порядка (которое также сводится к стандартным положительно-частотным мо-

дам пространства Минковского в ip -области) имеет вид

$$\begin{aligned}\chi_k^{(0)} &= 2^{-1/2} (k^2 + m^2 + m^2 e^{a\eta})^{-1/4} \exp \left[-i \int (k^2 + m^2 + m^2 e^{a\eta})^{1/2} d\eta \right] = \\ &= 2^{-1/2} (k^2 + m^2 + m^2 e^{a\eta})^{-1/4} \exp \left\{ -\frac{2i}{a} \left[(k^2 + m^2 + m^2 e^{a\eta})^{1/2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (k^2 + m^2)^{1/2} \operatorname{ar th} \left(\frac{k^2 + m^2}{k^2 + m^2 + m^2 e^{a\eta}} \right)^{1/2} \right] \right\}. \quad (3.110)\end{aligned}$$

Точное решение и решение нулевого порядка по адиабатическому параметру согласуются в отдаленном прошлом, когда расширение происходит бесконечно медленно. Используя стандартное асимптотическое разложение функций (3.109) для больших m , нетрудно проверить, что с точностью до незначительного фазового множителя (соответствующего неопределенному нижнему пределу в интеграле (3.102)) (3.109) сводится к (3.110) с точностью до членов более высокого порядка по адиабатическому параметру независимо от значения η .

В общем случае справедливо следующее соотношение:

$$u_k = \alpha_k^{(A)}(\eta) u_k^{(A)} + \beta_k^{(A)}(\eta) u_k^{(A)*}, \quad (3.111)$$

выражающее *точные* полевые моды (т. е. точные решения волнового уравнения) через решения, найденные в адиабатическом приближении $u_k^{(A)}$. Ясно, что $\alpha_k^{(A)}$ и $\beta_k^{(A)}$ должны быть постоянными с точностью до членов порядка A , поскольку $u_k^{(A)}$ и $u_{-k}^{(A)}$ — решения полевого уравнения соответствующего порядка. Допустим, что заданы конкретные значения

$$\begin{aligned}\alpha_k^{(A)}(\eta_0) &= 1 + O(T^{-(A+1)}), \\ \beta_k^{(A)}(\eta_0) &= 0 + O(T^{-(A+1)})\end{aligned} \quad (3.112)$$

для некоторого фиксированного момента времени η_0 . Тогда из наших рассуждений следует, что α и β , определенные формулами (3.112) при $\eta = \eta_0$, будут удовлетворять (3.112) в любой момент времени. Моды u_k , заданные соотношениями (3.111), (3.112), называются адиабатическими положительно-частотными модами порядка A . Важно заметить, что, несмотря на такое название, эти моды являются не приближенными, а точными решениями волнового уравнения. Но они не определены однозначно заданием условий (3.111) и (3.112). Существует бесконечное множество таких мод, соответствующих различному выбору η_0 .

Особое внимание следует обратить на точные моды u_k^{in} , которые сводятся к стандартным плосковолновым положительно-частотным решениям в статической ip -области. Другой набор мод u_k^{out} сводится к стандартной форме в статической

out-области. В обеих статических областях все члены ненулевого порядка разложения по адиабатическому параметру в $u_k^{(A)}$ обращаются в нуль, так что эти точные моды являются также и адиабатическими положительно-частотными модами бесконечного порядка. Таким образом, как следует из обсуждения соотношений (3.112), коэффициент Боголюбова β , связывающий два набора мод u_k^{in} и u_k^{out} , должен убывать в адиабатическом пределе $T \rightarrow \infty$ быстрее любой обратной степени T . Это действительно имело место в рассмотренном в предыдущем разделе примере. Следовательно, число частиц, найденное на основе квантования с использованием любого из этих наборов мод, будет адиабатическим инвариантом в период космологического расширения в полной аналогии с задачей о маятнике переменной длины.

Если вместо набора точных полевых мод, сводящихся к стандартному виду, скажем в in-области, использовать точные решения, сшитые с *приближенными* адиабатическими модами порядка A в некоторый последующий момент η_0 с помощью (3.111) (u_k и du_k/dt приравнены $u_k^{(A)}$ и $du_k^{(A)}/dt$ с точностью до членов порядка A по адиабатическому параметру при $\eta = \eta_0$), то в in-области эти точные решения уже не будут сводиться к стандартной форме, а будут, вообще говоря, представлять собой линейную комбинацию положительно- и отрицательно-частотных плосковолновых мод. Поэтому состояние вакуума, построенное с использованием этих «искаженных» мод, не будет совпадать с обычным вакуумным состоянием в in-области. Это значит, что инерциальный детектор частиц укажет на присутствие частиц в состоянии «искаженного» вакуума. Тем не менее спектр этих квантов будет всегда спадать при больших энергиях как $k^{-(A+1)}$ (или $m^{-(A+1)}$), что является отражением того факта, что эти моды сшиты с приближенными модами, отличающимися от стандартных in-мод лишь членами адиабатического порядка $A+1$ и выше. Таким образом, «искаженный» вакуум можно рассматривать как *адиабатическое приближение* для in-вакуума. В состоянии адиабатического вакуума высокоэнергетические моды с большой вероятностью остаются вакуумными, поэтому сопутствующий детектор с большой вероятностью даст нулевое значение для числа квантов этих мод. Но вероятность того, что любая наперед заданная мода не будет содержать квантов в течение всего времени, не столь велика, как в случае вакуумных состояний in и out с характерным для них более быстрым спаданием при высоких энергиях (быстрее любой степени k или m).

Следует правильно понимать две особенности понятия адиабатического вакуума. Во-первых, как уже отмечалось, адиба-

тический вакуум не является некоторым приближенным состоянием, связанным с приближенными полевыми модами. Конечно, адиабатические моды сами по себе являются лишь приближенными решениями полевого уравнения (с точностью до членов порядка A), но они используются лишь как математический шаблон, с которым сравниваются точные решения в некоторый момент $\eta = \eta_0$. Квантуются именно сами *точные* моды. Соответствующее состояние вакуума (т. е. адиабатический вакуум порядка A) для этих точных мод является вполне приемлемым претендентом на роль вакуумного состояния. Правда, оно может не отражать показаний *сопутствующего* детектора так же хорошо, как, скажем, вакуумные $(A+1)$ -адиабатическое или *in*-состояния, но вполне удовлетворяет общим принципам квантовой теории поля.

Во-вторых, адиабатическое вакуумное состояние порядка A *не единственно*, так как процедура сшивания может осуществляться при любом η_0 . Соответствующие точные моды будут отличаться во все остальные моменты времени только членами более высокого порядка малости по адиабатическому параметру, так что все они могут быть использованы при квантовании и построении адиабатического вакуума порядка A . Все такие вакуумные состояния будут иметь сходное поведение при больших энергиях, но, вообще говоря, различную структуру низкоэнергетических мод.

Хотя адиабатический вакуум менее точно определен, чем вакуумное состояние, связанное со статическими *in*- и *out*-областями, соответствующее представление о физических частицах (в смысле показаний сопутствующего детектора) является тем не менее наилучшим в случае пространства-времени, *не имеющего статических in- и out-областей*. Согласно современным космологическим теориям, именно такой является реальная вселенная.

Для иллюстрации использования адиабатического приближения в асимптотически *нестатических* четырехмерных космологических моделях выберем масштабный фактор

$$C(\eta) = a^2 + b^2\eta^2, \quad -\infty < \eta < \infty, \quad (3.113)$$

где a и b — постоянные [11]. В асимптотических областях $\eta \rightarrow \pm\infty$ эта модель соответствует радиационно-доминированной фридмановской космологии, причем

$$a(t) = C^{1/2}(\eta) \sim t^{1/2}. \quad (3.114)$$

Симметрия относительно изменения направления времени, присущая (3.113), означает, что пространство сжимается до минимального масштабного фактора при $\eta = 0$, «отражается» и вновь расширяется (рис. 8):

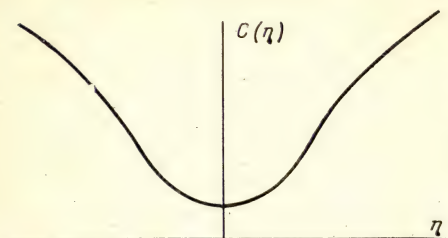


Рис. 8. Конформный масштабный фактор $C(\eta) = a^2 + b^2\eta^2$ описывает вселенную, сжимающуюся до минимального «размера» и затем снова расширяющуюся симметричным образом. При больших η ее поведение соответствует радиационно-доминированной модели Фридмана.

Хотя это пространство-время не является статическим в асимптотических областях, его можно рассматривать как медленно изменяющееся при $\eta \rightarrow \pm\infty$, поскольку

$$\frac{d^l}{d\eta^l} (\dot{C}/C) \rightarrow 0, \quad l \geq 0. \quad (3.115)$$

Таким образом, в пределе скорость расширения стремится к нулю, и адиабатическое приближение становится точным, поэтому приближения разных порядков будут приводить к одинаковому результату при $\eta \rightarrow \pm\infty$.

Адиабатическое приближение нулевого порядка остается хорошим приближением до тех пор, пока частота

$$\omega_k(\eta) = (k^2 + m^2 a^2 + m^2 b^2 \eta^2)^{1/2}$$

велика по сравнению с производными в левой части (3.115). Чтобы найти условия, при которых это справедливо, достаточно обратиться к (3.105), записывая множитель $T^2 \omega_k^2(\eta_1)$ в виде

$$T^2 \omega_k^2(\eta_1) = mbT^2 \lambda + m^2 b^2 \eta_1^2 T^4,$$

где

$$\lambda \equiv (ma^2/b) + (k^2/mb). \quad (3.116)$$

Поскольку производная \dot{C}/C ведет себя как T^{-1} , нетрудно видеть, что для фиксированного $\eta_1 = \eta/T$ адиабатическое приближение нулевого порядка справедливо при больших λ или η , или mb , либо для больших значений одновременно нескольких из этих величин.

Рассмотрим предел больших λ при фиксированных mb и η . Подставляя

$$W_k^{(0)} = \omega_k(\eta) = (mb\lambda)^{1/2} + O(T^{-2})$$

в (3.102), получаем

$$\chi_k^{(0)}(\eta) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} (4mb\lambda)^{-1/4} \exp[-i(mb\lambda)^{1/2} \eta], \quad (3.117)$$

где η фиксировано. Для сравнения построим точные решения уравнения (3.100), сводящиеся к (3.117) с точностью до членов порядка $O(T^{-1})$ (т. е. $O(\lambda^{-1/2})$) в пределе больших λ :

$$\chi_k^{\text{in}}(\eta) = (2mb)^{-1/4} e^{-\pi\lambda/8} D_{-(1-i\lambda)/2} [(i-1)(mb)^{1/2} \eta] \quad \text{при } \eta < 0, \quad (3.118)$$

$$\chi_k^{\text{out}}(\eta) = \chi_k^{\text{in}}(-\eta)^* \quad \text{при } \eta > 0. \quad (3.119)$$

(Это можно проверить, выражая функцию параболического цилиндра D через функции Уиттекера W и используя асимптотическое разложение функций Уиттекера для больших индексов; см., например, [68], с. 99, уравнение (19a)).

Можно также проверить, что предельное значение (3.102) при больших $|\eta|$

$$\chi_k^{(0)}(\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow \pm\infty} (2mb|\eta|)^{-1/2} e^{\mp imb\eta^2/2} \quad (3.120)$$

совпадает с пределом χ_k^{in} при $\eta \rightarrow -\infty$ и с пределом χ_k^{out} при $\eta \rightarrow +\infty$.

Подставляя (3.118) в (3.99), получим адиабатические положительно-частотные моды $u_k^{\text{in}}(x)$, с помощью которых разложим поле ϕ :

$$\phi = \sum_k (a_k^{\text{in}} u_k^{\text{in}} + a_k^{\text{in}*} u_k^{\text{in}*}) \quad (3.121)$$

и введем соответствующее адиабатическое вакуумное состояние $|0_{\text{in}}^A\rangle$, определенное соотношением

$$a_k^{\text{in}} |0_{\text{in}}^A\rangle = 0. \quad (3.122)$$

Аналогично можно с помощью (3.119) ввести другое адиабатическое вакуумное состояние того же адиабатического порядка

$$a_k^{\text{out}} |0_{\text{out}}^A\rangle = 0. \quad (3.123)$$

Поскольку χ_k^{in} сшиты с $\chi_k^{(0)}$ при $\eta = -\infty$, когда все адиабатические поправки более высокого порядка исчезают в силу (3.115), при $\eta = -\infty$ это состояние оказывается сшитым с $\chi_k^{(A)}$ для произвольного A . Таким образом, вакуум $|0_{\text{in}}^A\rangle$ является адиабатическим in-вакуумом бесконечного порядка адиабатичности. Точно так же состояние $|0_{\text{out}}^A\rangle$ представляет собой адиабатический out-вакуум бесконечного порядка. Чтобы убедиться в этом явно, достаточно вычислить коэффициенты преобразования Боголюбова между u_k^{in} и u_k^{out} :

$$u_k^{\text{in}} = \frac{i(2\pi)^{1/2} e^{-\pi\lambda/4}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1-i\lambda)\right)} u_k^{\text{out}} - i e^{-\pi\lambda/2} u_k^{\text{out}*} \quad (3.124)$$

(см., например, [47], формула (9.248(3))). Следовательно, если задано квантовое состояние $|0_{\text{in}}^A\rangle$, сопутствующий детектор частиц в out-области будет регистрировать спектр

$$|\beta_k|^2 = \exp \{ -\pi [(k^2/mb) + (ma^2/b)] \}, \quad (3.125)$$

который при больших энергиях действительно спадает быстрее, чем любая обратная степень k или m . Спектр спадает быстрее любой положительной степени b (параметра «медленности») при $b \rightarrow 0$. Заметим также, что выражение (3.125) остается конечным при $a \rightarrow 0$, что соответствует космологической модели с прохождением через сингулярность при $\eta = 0$.

Как было отмечено в работе [10], распределение (3.125) совпадает со спектром нерелятивистского газа находящихся в тепловом равновесии частиц с импульсом $kC^{-1/2}(\eta)$ при значении химического потенциала $-1/2 ma^2 C^{-1}(\eta)$ и температуре $b/(2\pi Ck_B)$, где k_B , как и раньше, обозначает постоянную Больцмана.

Альтернативная формулировка задачи рождения частиц гравитационным полем, называемая методом диагонализации гамильтониана, основана на определении состояний частиц в каждый момент времени по аналогии с определением в пространстве Минковского (см., например, [33, 103, 104, 250—254, 308]). В общем случае эта процедура приводит к предсказанию значительно более интенсивного рождения частиц, чем методы, использованные здесь, и не дает отмеченного выше быстрого спада числа частиц при больших k . В работе [417], например, предсказывается скорость рождения частиц, равная 16 частицам в 1 км^3 в год, — на много порядков больше значения, которого можно было ожидать на основании физических соображений. Диагонализация гамильтониана была подвергнута существенной критике, в частности, в работе Фуллингa [223] (см. также [401])¹⁾.

Анализ концептуальных оснований понятия частиц в искривленном пространстве-времени проведен в работах [8, 9, 264, 352, 478]).

3.6. Адиабатическое разложение функций Грина

В предыдущем разделе было показано, что высокочастотное поведение массивного скалярного поля относительно нечувстви-

¹⁾ В работе [417] при вычислении скорости рождения частиц допущена ошибка, на которую указано в работе С. Г. Мамаева и В. М. Мостепаненко (Phys. Lett., 1978, A vol. 67, p. 165). Правильный расчет методом диагонализации дает требуемое быстрое убывание импульсного спектра рожденных частиц при $k \rightarrow \infty$ (см. [253, 254]); приведено также выражение для полного тензора энергии-импульса с учетом вклада рожденных частиц и поляризации вакуума — Прим. перев.

тельно к крупномасштабной временной зависимости фонового пространства-времени Робертсона — Уокера. Причина состоит в том, что высокочастотные компоненты поля чувствительны лишь к геометрии в непосредственной близости от интересующей нас точки, а в этой ограниченной области метрика изменяется мало. В противоположность этому длинноволновые низкочастотные моды чувствительны к полному многообразию, и их структура зависит от геометрии и, следовательно, от конкретного адиабатического построения.

Для некоторых приложений, например связанных с регуляризацией ультрафиолетовых расходимостей, представляет интерес только высокочастотное поведение поля. В этом случае можно ограничиться приближением высоких частот. Поскольку высокие частоты чувствительны к малым расстояниям, мы приходим к необходимости построения приближения, справедливого для малых расстояний.

Особый интерес представляет поведение функций Грина, например $G_F(x, x')$, в пределе $x \rightarrow x'$. Здесь мы будем следовать работе [83], в которой было получено адиабатическое разложение G_F .

Вводя нормальные римановы координаты y^μ для точки x с началом в точке x' [333, 398], можно получить следующее разложение метрики:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{3} R_{\mu\alpha\nu\beta} y^\alpha y^\beta - \frac{1}{6} R_{\mu\alpha\nu\beta;\gamma} y^\alpha y^\beta y^\gamma + \\ + \left[\frac{1}{20} R_{\mu\alpha\nu\beta;\gamma\delta} + \frac{2}{45} R_{\alpha\mu\beta\lambda} R_{\gamma\nu\delta}^\lambda \right] y^\alpha y^\beta y^\gamma y^\delta + \dots,$$

где $\eta_{\mu\nu}$ — метрический тензор Минковского, и все коэффициенты вычислены при $y = 0$.

Вводя функцию

$$\mathcal{G}_F(x, x') = (-g(x))^{1/4} G_F(x, x'), \quad (3.126)$$

и ее фурье-образ

$$\mathcal{F}_F(x, x') = (2\pi)^{-n} \int d^n k e^{-iky} \mathcal{F}_F(k), \quad (3.127)$$

где $ky = \eta^{\alpha\beta} k_\alpha y_\beta$, можно перейти к некоторому локальному импульсному пространству. Разлагая (3.49) в нормальных координатах и переходя к k -пространству, можно найти $\mathcal{F}_F(k)$ путем итераций с точностью до любого адиабатического порядка. Приведем результат с точностью до четвертого порядка (т. е.

с учетом четырех производных от метрики):

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_F(k) \approx & (k^2 - m^2)^{-1} - \left(\frac{1}{6} - \xi\right) R (k^2 - m^2)^{-2} + \frac{1}{2} i \left(\frac{1}{6} - \xi\right) R_{;\alpha} \times \\ & \times \partial^\alpha (k^2 - m^2)^{-2} - \frac{1}{3} a_{\alpha\beta} \partial^\alpha \partial^\beta (k^2 - m^2)^{-2} + \\ & + \left[\left(\frac{1}{6} - \xi\right)^2 R^2 + \frac{2}{3} a^\lambda{}_\lambda \right] (k^2 - m^2)^{-3}, \quad (3.128) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \partial_\alpha &= \partial / \partial k^\alpha, \\ a_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R_{;\alpha\beta} + \frac{1}{120} R_{;\alpha\beta} - \frac{1}{40} R_{\alpha\beta;\lambda}{}^\lambda - \frac{1}{30} R_\alpha{}^\lambda R_{\lambda\alpha} + \\ & + \frac{1}{60} R^\lambda{}_\alpha{}^\lambda{}_\beta R_{\lambda\lambda} + \frac{1}{60} R^{\lambda\mu\kappa}{}_\alpha R_{\lambda\mu\kappa\beta}, \quad (3.129) \end{aligned}$$

и символом \approx обозначено асимптотическое разложение. Для того чтобы выражение (3.127) действительно представляло собой хронологически упорядоченное произведение (типа (3.48)), достаточно проводить интегрирование по k^0 вдоль соответствующего (фейнмановского) контура на рис. 3. Это эквивалентно замене m^2 на $m^2 - i\epsilon$. Аналогично получим адиабатические разложения для остальных функций Грина, используя другие контуры на рис. 3.

Подстановка (3.128) в (3.127) дает

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_F(x, x') \approx & \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} e^{-iky} \left[a_0(x, x') + a_1(x, x') \left(-\frac{\partial}{\partial m^2} \right) + \right. \\ & \left. + a_2(x, x') \left(\frac{\partial}{\partial m^2} \right)^2 \right] (k^2 - m^2)^{-1}, \quad (3.130) \end{aligned}$$

где

$$a_0(x, x') \equiv 1 \quad (3.131)$$

и с точностью до четвертого адиабатического порядка

$$a_1(x, x') = \left(\frac{1}{6} - \xi\right) R - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} - \xi\right) R_{;\alpha} y^\alpha - \frac{1}{3} a_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta, \quad (3.132)$$

$$a_2(x, x') = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} - \xi\right)^2 R^2 + \frac{1}{3} a^\lambda{}_\lambda, \quad (3.133)$$

причем все геометрические величины в правой части должны быть взяты в точке x' .

Если в (3.130) использовать интегральное представление

$$(k^2 - m^2 + i\epsilon)^{-1} = -i \int_0^\infty ds e^{is(k^2 - m^2 + i\epsilon)}, \quad (3.134)$$

то, изменив порядок интегрирования по $d^n k$ и ds и выполнив явно интегрирование по $d^n k$, получим

$$\mathcal{G}_F(x, x') = -i(4\pi)^{-n/2} \int_0^\infty i ds (is)^{-n/2} \exp[-im^2 s + (\sigma/2is)] F(x, x'; is), \quad (3.135)$$

где величина σ определена как

$$\sigma(x, x') = \frac{1}{2} y_a y^a, \quad (3.136)$$

т. е. представляет собой половину квадрата расстояния между x и x' , а функция F имеет следующее адиабатическое разложение:

$$F(x, x'; is) \approx a_0(x, x') + a_1(x, x') is + a_2(x, x') (is)^2 + \dots \quad (3.137)$$

С учетом (3.126) равенство (3.135) дает представление для функции $G_F(x, x')$, первоначально полученное де Виттом [153, 156] с помощью метода Швингера [427] (отсюда индекс DS ; см. также [199, 366])

$$G_F^{DS}(x, x') = -i\Delta^{1/2}(x, x') (4\pi)^{-n/2} \int_0^\infty i ds (is)^{-n/2} \times \\ \times \exp[-im^2 s + (\sigma/2is)] F(x, x'; is), \quad (3.138)$$

где Δ — определитель ван-Флека [476]

$$\Delta(x, x') = -\det[\partial_\mu \partial_\nu \sigma(x, x')][g(x)g(x')]^{-1/2}. \quad (3.139)$$

В нормальных координатах с началом в точке x' , которые здесь используются, Δ сводится к $[-g(x)]^{-1/2}$. В трактовке де Витта асимптотическое разложение (3.137) с учетом всех порядков адиабатичности записывается в виде

$$F(x, x'; is) \approx \sum_{j=0}^\infty a_j(x, x') (is)^j, \quad (3.140)$$

где $a_0(x, x') = 1$, а все прочие коэффициенты a_j определяются рекуррентными соотношениями, позволяющими найти их асимптотические разложения [113]. Следует отметить, что так называемое представление «собственного времени» де Витта — Швингера (3.138) является точным представлением для фейнмановского пропагатора. Разложения же (3.137) и (3.140) представляют собой лишь асимптотические приближения, справедливые в пределе больших значений параметра адиабатичности T .

Если подставить (3.140) в (3.138), то можно вычислить интеграл и получить адиабатическое разложение фейнмановского пропагатора в координатном пространстве¹⁾:

$$G_F^{DS}(x, x') \approx \frac{-i\pi\Delta^{1/2}(x, x')}{(4\pi i)^{n/2}} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x, x') \left(-\frac{\partial}{\partial m^2}\right)^j \times \\ \times \left[\left(\frac{2m^2}{-\sigma}\right)^{(n-2)/4} H_{(n-2)/2}^{(2)}((2m^2\sigma)^{1/2})\right], \quad (3.141)$$

в котором подразумевается, что величина σ имеет мнимую часть $i\epsilon$.

Поскольку мы не накладывали глобальных граничных условий на функции Грина как решения уравнения (3.49), разложение (3.141) не определяет выбора какого-либо вакуумного состояния в (3.48). В частности, добавка $i\epsilon$ в разложении G_F означает только, что (3.141) представляет собой математическое ожидание хронологически-упорядоченного произведения полей на некотором множестве состояний. При некоторых условиях использование добавки $i\epsilon$ в точном представлении (3.138) может дать добавочную информацию о глобальной природе состояний (см., например, обсуждение на стр. 54). Иначе говоря, то же самое высокочастотное поведение (3.48) имеет место почти при любом выборе вакуумного состояния — факт, который, как мы увидим ниже, играет очень важную роль.

В пространстве-времени Робертсона — Уокера фейнмановская функция Грина, вычисленная в состоянии адиабатического вакуума $|0^A\rangle$:

$$iG_F^A(x, x') = \langle 0^A | T(\phi(x)\phi(x')) | 0^A \rangle, \quad (3.142)$$

должна иметь разложение вида (3.138), (3.140). Вакуум $|0^A\rangle$ определен с помощью набора адиабатических положительно-частотных мод u_k , задаваемых соотношениями (3.111), (3.112) для некоторого η_0 , так что (3.142) можно переписать в виде

$$iG_F^A(x, x') = \theta(x^0 - x'^0) \int d^{n-1} k u_k(x) u_k^*(x') + \\ + \theta(x'^0 - x^0) \int d^{n-1} k u_k^*(x) u_k(x'). \quad (3.143)$$

Чтобы получить разложение (3.143) с точностью до членов порядка A по адиабатическому параметру, достаточно разложить u_k до этого порядка, т. е. вычислить (3.133), заменив u_k на u_k^A .

¹⁾ С помощью функционального интегрирования можно расширить область применимости адиабатического приближения [593*]. — *Прим. перев.*

Выполнив это, можно явно проверить, что (3.142) и (3.143) согласуются с точностью до членов порядка A [36, 76, 83]. В частности, можно проверить, что добавка $i\epsilon$ необходима, чтобы обеспечить временное упорядочение в (3.142) и (3.143).

Обсудим теперь вопрос о реакции детектора на адиабатическое вакуумное состояние порядка A . Для этой цели следует подставить

$$G_A^+(x(\tau), x(\tau')) \equiv \langle 0^A | \phi(x(\tau)) \phi(x(\tau')) | 0^A \rangle \quad (3.144)$$

в (3.55) и найти функцию отклика детектора, движущегося вдоль мировой линии $x(\tau)$. Если ограничиться вкладом в вероятность членов до адиабатического порядка A в точной двухточечной функции, то для произвольного пространства-времени можно рассчитать этот вклад с помощью адиабатического разложения $u_k^{(A)}$ для мод. Как и для G_F , разложение функции G_A^+ эквивалентно учету членов до порядка A в представлении де Витта — Швингера G_{DS}^+ . Разложение G_{DS}^+ может быть вычислено в импульсном представлении как

$$iG_{DS}^+(x, x') = [-g(x)]^{-1/4} \mathcal{G}^+(x, x'),$$

где с точностью до четвертого порядка по параметру адиабатичности \mathcal{G}^+ дается правой частью (3.130), причем интегрирование по k^0 проводится вдоль контура, показанного на рис. 9. Используя разложение для $[-g(x)]^{-1/4}$ в нормальных координатах с началом в точке x' , замечаем, что G^+ (с точностью до произвольного адиабатического порядка) представляет собой сумму членов вида

$$\int \frac{d^n k e^{-ik \cdot y}}{(2\pi)^n (k^2 - m^2)^p} S_{\mu\nu \dots \lambda}(x') y^\mu y^\nu \dots y^\lambda, \quad (3.145)$$

где S — некоторый тензор, построенный из геометрических величин, а y^μ , как и выше, нормальные координаты точки x относительно точки x' . В результате интегрирования по k^0 вдоль контура, показанного на рис. 9, получаем линейную комбинацию величин вида

$$\int \frac{d^{n-1} k e^{ik \cdot y - i\omega y^0}}{(2\pi)^{n-1} (2\omega)^r} S_{\mu\nu \dots \lambda}(x') (y^0)^q y^\mu y^\nu \dots y^\lambda, \quad (3.146)$$

где r и q — целые числа.

В дальнейшем мы ограничимся сопутствующими детекторами, для которых мировые линии $x(\tau)$ таковы, что $x^i = \text{const}$ и $\tau = t$ (космологическое время Робертсона — Уокера). Используя свойства нормальных координат, перепишем $G_{DS}^+(x(\tau), x(\tau'))$ в виде линейной комбинации членов типа (3.146) с $y = 0$, $y^0 = t$.

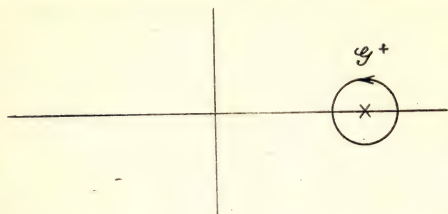


Рис. 9. Контур в плоскости комплексной переменной k^0 , который используется при вычислении интеграла, определяющего \mathcal{G}^+ . Крестиком отмечен полюс в точке $k^0 = (|k|^2 + m^2)^{1/2}$.

Подстановка такого члена в (3.55) дает интеграл вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega + E - E_0)\tau} (\tau)^l d\tau \quad (l \text{ целое}).$$

Поскольку $\omega + E - E_0 > 0$, все интегралы такого типа обращаются в нуль, так как представляют собой производные от $\delta(\omega + E - E_0)$.

В заключение можно сказать, что адиабатический вакуум A -го порядка есть состояние, в котором сопутствующий детектор частиц остается невозбужденным с вероятностью, отличающейся от единицы лишь членами порядка $A + 1$. Это означает, что вероятность регистрации частицы с энергией ω в ультрафиолетовом пределе стремится к нулю быстрее, чем A -я обратная степень ω , или как A -я степень некоторого параметра «медленности». Тем самым доказано утверждение Паркера [381] о том, что адиабатические частицы (хотя такой термин обычно не употребляется, см. [390]) удовлетворяют критерию «наблюдаемости в медленно расширяющейся вселенной с помощью тех же приборов, что и в статическом случае». Паркер доказал это совершенно другим путем [375].

Чем выше выбирается порядок A при этом построении, тем более вероятно, что высокочастотные моды окажутся в вакуумном состоянии. Конечно, при этом все еще будут регистрироваться частицы низкочастотных мод; проведенное здесь высокочастотное разложение не позволяет детально проследить за ними. Если же детектор не является сопутствующим, то, вообще говоря, будут регистрироваться частицы и в высокочастотных модах, которые спадают медленнее, чем T^{-A} .

3.7. Конформный вакуум

Несмотря на всю привлекательность адиабатических вакуумных состояний, факт остается фактом, что в искривленном пространстве-времени некоторый специальный набор решений уравнений поля и соответствующие вакуумное и многочастичные состояния в *общем случае* не имеют прямого физического смысла. В частности, «вакуумное» состояние вовсе не обязательно ока-

зывается лишенным частиц, даже если измерения производятся свободно падающим детектором. Тем не менее, если интересующее нас пространство-время имеет геометрические симметрии, то можно указать выделенный набор мод, и соответствующие состояния частиц становятся в некотором смысле «естественными».

Один из специальных случаев, к которому мы будем часто обращаться, это случай *конформно-тривиальной* ситуации, т. е. конформно-инвариантного поля в конформно-плоском пространстве-времени (конформном пространстве Минковского). Симметрия таких пространств проявляется в существовании конформного вектора Киллинга, удовлетворяющего уравнению (3.23). Примерами конформно-плоских пространств могут служить все двумерные пространства, а также пространственно-плоские космологические модели Робертсона — Уокера. Метрические тензоры таких пространств всегда могут быть представлены в виде

$$g_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x) \eta_{\mu\nu}, \quad (3.147)$$

где $\eta_{\mu\nu}$ — метрический тензор пространства Минковского.

Волновое уравнение для конформно-инвариантного скалярного поля получается при $m = 0$ и при указанном в (3.27) выборе параметра ξ :

$$\left[\square + \frac{1}{4}(n-2)R/(n-1) \right] \phi = 0. \quad (3.148)$$

При конформном преобразовании

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^{-2} g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad (3.149)$$

из (3.1), (3.5) и (3.148) находим

$$\square \bar{\phi} \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu (\Omega^{(n-2)/2} \phi) = 0, \quad (3.150)$$

так как $\bar{R} = 0$ в пространстве Минковского. Показатель степени $(n-2)/2$ величины Ω представляет собой конформный вес скалярного поля. Уравнение (3.150) имеет обычные решения для ϕ в пространстве Минковского (см. (2.11))

$$\bar{u}_k(x) = [2\omega(2\pi)^{n-1}]^{-1/2} e^{-ik \cdot x}, \quad k^0 = \omega. \quad (3.151)$$

Эти моды являются положительно-частотными по отношению к времениподобному конформному вектору Киллинга ∂_η :

$$\mathcal{L}_{\partial_\eta} \bar{u}_k(x) = -i\omega \bar{u}_k(x), \quad \omega > 0. \quad (3.152)$$

Замечая на основании уравнения (3.150), что $\phi = \Omega^{(2-n)/2} \bar{\phi}$, мы можем записать разложение (3.30) по модам для ϕ в виде

$$\phi(x) = \Omega^{(2-n)/2}(x) \sum_k [a_k \bar{u}_k(x) + a_k^\dagger \bar{u}_k^*(x)], \quad (3.153)$$

где \bar{y}_k определено (3.151). Ассоциируемое с этими модами вакуумное состояние, определяемое условием $a_k|0\rangle=0$, называют *конформным вакуумом*. Подобные состояния существуют также для безмассового поля со спином $1/2$ и для электромагнитного поля (см. разд. 3.8).

Аналогично можно рассмотреть уравнение для функций Грина (3.49). После применения преобразования (3.5) уравнение

$$\left[\square_x + \frac{1}{4}(n-2)R(x)/(n-1)\right]D_F(x, x') = -[-g(x)]^{-1/2}\delta^n(x-x')$$

принимает вид

$$\Omega^{-(n+2)/2}(x)\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu(\Omega^{(n-2)/2}(x)D_F(x, x')) = -\Omega^{-n}(x)\delta^n(x-x').$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu(\Omega^{(n-2)/2}(x)D_F(x, x')) &= -\Omega^{(2-n)/2}(x)\delta^n(x-x') = \\ &= -\Omega^{(2-n)/2}(x')\delta^n(x-x'),\end{aligned}$$

откуда следует

$$D_F(x, x') = \Omega^{(2-n)/2}(x)\tilde{D}_F(x, x')\Omega^{(2-n)/2}(x'), \quad (3.154)$$

где $\tilde{D}_F(x, x')$ — фейнмановская функция Грина для безмассового поля в пространстве Минковского, удовлетворяющая уравнению (2.74). Это соотношение может быть также получено на основе определения (3.48) функции Грина в терминах полей. Подобные соотношения существуют и для других функций Грина скалярного поля. Для безмассовых полей со спином $1/2$ и 1 выполняются аналогичные соотношения, в которых степень Ω определяется конформным весом данного поля (см. разд. 3.8).

Применим теперь эти результаты для анализа показаний детектора частиц во вселенной Робертсона — Уокера с элементом длины (3.98), предполагая, что поле находится в состоянии конформного вакуума. Будем рассматривать случай четырех измерений.

Сопутствующая геодезическая $x = \text{const}$ в пространстве-времени Робертсона — Уокера при конформном преобразовании (3.149) отображается в геодезическую $x = \text{const}$ пространства Минковского. Но собственное время τ вдоль этих геодезических, совпадающее с космическим временем t , не совпадает с конформным временным параметром $x^0 = \eta$ в (3.98) (см. также (3.82)). Вдоль сопутствующей геодезической функция Грина $D^+(x, x')$ сводится к

$$D^+(\eta, \eta') = -\frac{C^{-1/2}(\eta)C^{-1/2}(\eta')}{4\pi^2(\eta - \eta' - i\epsilon)^2}, \quad (3.155)$$

где использованы соотношения (3.59) и (3.154) с заменой G_F на D^+ и положено $\Omega^2 = C$. Подставляя это выражение в функцию

отклика (3.55) и используя (3.82) для перехода от интегрирования по τ к интегрированию по η , получим выражение

$$\mathcal{F}(E) = -\frac{1}{4\pi^2} \int d\eta \int d\eta' \frac{\exp \left[-iE \int_{\eta'}^{\eta} C^{1/2}(\eta'') d\eta'' \right]}{(\eta - \eta' - i\epsilon)^2}, \quad (3.156)$$

которое, вообще говоря, не обращается в нуль из-за наличия множителя $C^{1/2}$ в показателе экспоненты. В разд. 5.3, 5.4 приведены примеры.

Таким образом, даже сопутствующий детектор частиц — ближайший аналог в пространстве-времени Робертсона — Уокера инерциального наблюдателя пространства Минковского, — вообще говоря, будет регистрировать присутствие частиц в состоянии конформного вакуума. С другой стороны, из соотношения (3.152) следует, что моды, которые являются положительно-частотными по отношению к конформному времени в некоторый момент времени, остаются такими при всех значениях времени. Следовательно, если поле, удовлетворяющее конформно-инвариантному волновому уравнению в конформно-плоском пространстве-времени, находится в состоянии конформного вакуума в некоторый момент времени, оно будет находиться в этом состоянии все время, и рождения частиц происходить не будет [379—384] (см. также с. 198). Это верно для нейтрино (если они безмассовы) и фотонов, но не имеет места для гравитонов [255, 256]. Утверждение об отсутствии рождения частиц нужно понимать в следующем смысле. Если космологическое расширение останавливается (гладким образом), то инерциальный детектор, адиабатически включающийся после остановки расширения, не будет обнаруживать частиц. Положительный отклик детектора при его включении во время расширения можно поэтому интерпретировать как ложный, хотя на самом деле это лишь еще одно проявление того факта, что в областях с ненулевой кривизной пространства-времени понятие частиц теряет значительную часть смысла, интуитивно в него вкладываемого.

Конформный вакуум для несколько более общего класса пространств обсуждается в разд. 5.2 (см. также [31]).

3.8. Поля произвольного спина в искривленном пространстве-времени

В теории поля в пространстве Минковского спинные свойства поля определяются его поведением при бесконечно малых лоренцевых преобразованиях

$$x^a \rightarrow \bar{x}^a = \Lambda^a_{\beta} x^{\beta} = (\delta^a_{\beta} + \omega^a_{\beta}) x^{\beta}, \quad (3.157)$$

$$\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}, \quad |\omega^a_{\beta}| \ll 1. \quad (3.158)$$

(Мы ограничимся здесь случаем четырехмерного пространства Минковского.)

Многокомпонентное поле общего вида $T^{\gamma\delta} \dots \lambda(x)$ преобразуется согласно

$$[D(\Lambda)]^{\gamma'\delta' \dots \lambda'}_{\gamma\delta \dots \lambda} T^{\gamma\delta} \dots \lambda, \quad (3.159)$$

$$D(\Lambda) = 1 + \frac{1}{2} \omega^{\alpha\beta} \Sigma_{\alpha\beta}. \quad (3.160)$$

Для того чтобы преобразования Лоренца образовывали группу, антисимметричные величины $\Sigma_{\alpha\beta}$ (называемые генераторами группы) должны удовлетворять коммутационным соотношениям

$$[\Sigma_{\alpha\beta}, \Sigma_{\gamma\delta}] = \eta_{\gamma\beta} \Sigma_{\alpha\delta} - \eta_{\alpha\gamma} \Sigma_{\beta\delta} + \eta_{\delta\beta} \Sigma_{\gamma\alpha} - \eta_{\delta\alpha} \Sigma_{\gamma\beta}, \quad (3.161)$$

или, что эквивалентно,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = i\mathbf{a}, \quad \mathbf{b} \times \mathbf{b} = i\mathbf{b}, \quad [a_i, b_i] = 0, \quad (3.162)$$

где

$$a_i = \frac{1}{2} (-i\epsilon_i^{kl} \Sigma_{kl} + \Sigma_{i0}), \quad b_j = \frac{1}{2} (-i\epsilon_j^{kl} \Sigma_{kl} - \Sigma_{j0}). \quad (3.163)$$

Соотношения (3.162) представляют собой коммутационные соотношения для двух независимых операторов углового момента \mathbf{a} и \mathbf{b} . Каждый из них может быть представлен бесконечными матрицами, сводящимися к конечномерным матрицам, определяемым целыми или полуцелыми числами A и B , где

$$\mathbf{a}^2 = A(A+1), \quad \mathbf{b}^2 = B(B+1), \quad (3.164)$$

которые действуют в векторном пространстве $2A+1$ и $2B+1$ измерений соответственно. Эти неприводимые представления, будучи скомбинированы в прямое произведение, дают представления группы Лоренца, задаваемые парой целых или полуцелых чисел (A, B) , которые действуют в пространстве $(2A+1)(2B+1)$ измерений.

Например, векторное поле T^γ преобразуется как $\Lambda^\gamma_\gamma T^\gamma$, поэтому с учетом (3.157) и (3.160) имеем

$$[\Sigma_{\alpha\beta}]^\gamma_\delta = \delta_\alpha^\gamma \eta_{\beta\delta} - \delta_\beta^\gamma \eta_{\alpha\delta}, \quad (3.165)$$

что дает в соответствии с (3.164) $A = 1/2$, $B = 1/2$. Таким образом, векторное поле может классифицироваться как неприводимое представление $(1/2, 1/2)$ группы Лоренца. Это поле имеет спин $1/2 + 1/2 = 1$.

Подобным образом находим, что скалярное поле, для которого очевидно $\Sigma_{\alpha\beta} = 0$, может быть отождествлено с неприводимым представлением $(0, 0)$, т. е. с полем спина нуль. Тензорное

поле второго ранга преобразуется как $\Lambda^\gamma_\nu \Lambda^{\delta'}_\delta T^{\nu\delta}$, следовательно, $D(\Lambda)$ есть произведение двух преобразований $D(\Lambda)$ для векторного поля. Произведение представлений $(1/2, 1/2) \otimes (1/2, 1/2)$ разлагается на четыре неприводимых представления $(1, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ и $(0, 0)$. Поэтому тензорное поле содержит компоненты со спинами 2, 1 и 0.

Наконец, для дираковского спинорного поля нужно выбрать

$$\Sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta], \quad (3.166)$$

где γ — матрицы Дирака, что ассоциируется с представлениями $(1/2, 0)$ и $(0, 1/2)$ — неприводимыми представлениями для спина $1/2$.

Эту теорию можно обобщить на случай искривленного пространства-времени, не теряя связи с группой Лоренца. Этого можно достичь с помощью так называемого тетрадного формализма (см., например, [446, 494]), который легко может быть приспособлен и для n измерений. Сущность такого подхода состоит во введении нормальных координат y^α_X в каждой точке пространства-времени X . В терминах координат y^α_X метрика в точке X есть просто $\eta_{\alpha\beta}$. В терминах более общей системы координат метрический тензор имеет более сложный вид, но связан с $\eta_{\alpha\beta}$ соотношением

$$g_{\mu\nu}(X) = V^\alpha_\mu(X) V^\beta_\nu(X) \eta_{\alpha\beta}, \quad (3.167)$$

где величины

$$V^\alpha_\mu(X) = \left(\frac{\partial y^\alpha_X}{\partial x^\mu} \right)_{x=X}, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3,$$

образуют тетраду. Заметим, что индекс α относится к локально-инерциальной системе координат, связанной с нормальными координатами y^α_X в точке X , в то время как μ относится к общей системе координат x^μ . В этом разделе индексы первого типа мы будем обозначать начальными буквами греческого алфавита, а индексы второго типа — буквами из второй половины того же алфавита.

Так как общая система координат произвольна, можно рассматривать изменение x^μ , оставляя фиксированными y^α_X . Тогда величины V^α_μ преобразуются как ковариантный вектор:

$$V^\alpha_\mu \rightarrow \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} V^\alpha_\nu. \quad (3.168)$$

Очевидно, координаты y^α_X можно также подвергать преобразованию Лоренца, зависящему от пространственно-временной точки X :

$$y^\alpha_X \rightarrow y'^\alpha_X = \Lambda^\alpha_\beta(X) y^\beta_X. \quad (3.169)$$

В этом случае величины V^α_μ преобразуются как лоренцев контравариантный вектор

$$V^\alpha_\mu(X) \rightarrow \Lambda^\alpha_\beta(X) V^\beta_\mu(X), \quad (3.170)$$

что, очевидно, оставляет метрику (3.167) инвариантной.

Если общековариантный вектор A_μ скалярно умножить на V^μ_α , то результирующий объект

$$A_\alpha = V^\mu_\alpha A_\mu$$

при общих преобразованиях координат преобразуется как совокупность четырех скаляров, в то время как при локальных лоренцевых преобразованиях (3.169) он ведет себя как вектор. Таким образом, с помощью тетрады можно превращать общекординатные тензоры в локальные преобразующиеся по Лоренцу тензоры, перенося дополнительную координатную зависимость на тетрадные векторы.

Если выражение (3.159) записать схематически как $D(\Lambda)\psi$, где ψ — тензорное поле, то производные $\partial_\alpha\psi$ также будут тензорными полями в пространстве Минковского. При преобразованиях Лоренца $\partial_\alpha\psi$ переходит в $\Lambda^\beta_\alpha D(\Lambda)\partial_\beta\psi$. При переходе к искривленному пространству-времени производную ∂_α можно обобщить до ковариантной производной ∇_α , но сохранить этот простой закон преобразования для произвольных локальных лоренцевых преобразований в каждой пространственно-временной точке:

$$\nabla_\alpha\psi \rightarrow \Lambda^\beta_\alpha(x) D(\Lambda(x)) \nabla_\beta\psi(x). \quad (3.171)$$

Этого можно достичь, определяя ковариантную производную соотношением

$$\nabla_\alpha = V^\mu_\alpha (\partial_\mu + \Gamma_\mu), \quad (3.172)$$

где связность

$$\Gamma_\mu(x) = \frac{1}{2} \Sigma^{\alpha\beta} V^\alpha_\nu(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} V_{\beta\nu}(x) \right); \quad (3.173)$$

здесь $\Sigma^{\alpha\beta}$ — генератор группы Лоренца, ассоциируемый с выбранным представлением $D(\Lambda)$, по которому преобразуется ψ , а $V_{\beta\nu} = g_{\mu\nu} V^\mu_\beta$.

Польза, которую можно извлечь из соотношения (3.171), состоит в том, что любая функция ψ и $\nabla_\alpha\psi$, являющаяся скаляром при лоренцевых преобразованиях в пространстве Минковского, остается скаляром при локальном преобразовании тетрады, равно как и при общих преобразованиях координат. Поэтому лагранжиан поля может быть обобщен на случай искривленного пространства-времени заменой производных ∂_α на ∇_α и превра-

щением всех векторов, тензоров и т. д. в величины: $A_\alpha \rightarrow V^\mu_\alpha A_\mu$ и т. д.

Например, для скалярного поля ϕ спин равен нулю и $\Sigma_{\alpha\beta} = 0$, поэтому (3.172) дает $\nabla_\alpha = \partial_\alpha$. Следовательно, лагранжиан (2.2) принимает вид

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}(-g)^{1/2}(\eta^{\alpha\beta}V^\mu_\alpha\partial_\mu\phi V^\nu_\beta\partial_\nu\phi - m^2\phi^2). \quad (3.174)$$

Множитель $[-g(x)]^{1/2} = \det(V^\alpha_\mu)$ введен для того, чтобы $\mathcal{L}(x)$ было скалярной плотностью и соответственно чтобы действие

$$S = \int \mathcal{L}(x) d^4x \quad (3.175)$$

было скаляром. С учетом (3.167) выражение (3.174) сводится к (3.24) с $\xi = 0$. Член ξR в плоском пространстве-времени обращается в нуль; он является единственным геометрическим скаляром, который можно добавить в лагранжиан.

Плотность лагранжиана поля со спином $1/2$ в пространстве Минковского дается выражением (2.45). В искривленном пространстве-времени с учетом выражения (3.166) для $\Sigma_{\alpha\beta}$ в (3.173) она принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &= \det V \left\{ \frac{1}{2} i [\bar{\psi} \gamma^\alpha V^\mu_\alpha \nabla_\mu \psi - V^\mu_\alpha (\nabla_\mu \bar{\psi}) \gamma^\alpha \psi] - m \bar{\psi} \psi \right\} = \\ &= \det V \left\{ \frac{1}{2} i [\bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - (\nabla_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi] - m \bar{\psi} \psi \right\}, \end{aligned} \quad (3.176)$$

где $\gamma^\mu = V^\mu_\alpha \gamma^\alpha$ — зависящие от координат матрицы, представляющие собой обобщение дираковских матриц γ на искривленное пространство, которые, как следует из (3.167), удовлетворяют соотношениям

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (3.177)$$

обобщающим (2.46) на искривленное пространство-время.

Лагранжиан (3.176), который также может быть использован в пространстве n измерений, является конформно-инвариантным в безмассовом пределе, если принять закон преобразования

$$\psi \rightarrow \Omega^{(1-n)/2}(x) \psi \quad (3.178)$$

при преобразованиях (3.1).

Варьирование действия S по $\bar{\psi}$ приводит к ковариантному уравнению Дирака

$$i\gamma^\mu \nabla_\mu \psi - m\psi = 0 \quad (3.179)$$

[23, 198, 200, 420].

Следующим является электромагнитное поле $F_{\mu\nu}$, имеющее спин 1. Выражение (2.54), используемое в пространстве

Минковского совместно с дополнительным членом, нарушающим калибровочную симметрию, и лагранжианом дѹхов, нужно обобщить путем замены A_α на $V^\mu_\alpha A_\mu$ и ∂_α на ∇_α , где Γ_μ определяется формулой (3.173). В этом случае $\Sigma_{\alpha\beta}$ задается выражением (3.165) для представления $(1/2, 1/2)$ группы Лоренца. В результате получим максвелловский лагранжиан

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}(-g)^{1/2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (3.180)$$

$$F_{\mu\nu} = A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} \quad (3.181)$$

(вклады связностей сокращаются), и нарушающий калибровочную симметрию дополнительный член

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{2}\xi^{-1}(A^\mu{}_{;\mu})^2. \quad (3.182)$$

Дѹховое поле описывается обычной скалярной плотностью лагранжиана (см. (2.141))

$$\mathcal{L}_{\text{дх}} = g^{\mu\nu} \partial_\mu c \partial_\nu c^*. \quad (3.183)$$

Варьирование действия $S = \int (\mathcal{L} + \mathcal{L}_G) d^4x$ по отношению к A_μ дает

$$F_{\mu\nu}{}^{;\nu} + \xi^{-1}(A^\nu{}_{;\nu})_{;\mu} = 0, \quad (3.184)$$

или

$$A_{\mu;\nu}{}^{;\nu} + R_\mu{}^\rho A_\rho - (1 - \xi^{-1}) A_{\nu;\mu}{}^{;\nu} = 0. \quad (3.185)$$

Важно отметить, что эта теория является конформно-инвариантной только в случае четырех измерений.

Детальное обсуждение полей спина 1 в искривленном пространстве-времени дано Шредингером [421], Паркером [383] и Машуном [353].

Использованный выше метод обобщения теорий полей со спином 0, $1/2$ и 1 на случай искривленного пространства-времени может быть применен также для полей произвольного спина. Такие теории в плоском пространстве-времени исследовались, например, Дираком [160], Фирцем [195], Фирцем и Паули [196], а также в работах [26, 165, 166, 456, 490—492] (см. также обзор [364]).

Следствия теорий произвольного спина в искривленном пространстве-времени были рассмотрены, например, в работах [31, 38, 115, 117, 168, 182, 273, 349, 395]. Мы не будем здесь больше касаться этого интересного направления.

Как и для скалярных полей, можно обобщить на случай искривленного пространства-времени функции Грина и соответствующие уравнения для полей ненулевого спина. Например, фейн-

мановские пропагаторы для спинов $1/2$ и 1 по-прежнему будут иметь форму (2.80) и (2.86) соответственно, но теперь они удовлетворяют уравнениям (ср. (2.82), (2.87))

$$[i\gamma^\mu(x)\nabla_\mu^x - m]S_F(x, x') = [-g(x)]^{-1/2}\delta^n(x - x'), \quad (3.186)$$

$$\begin{aligned} [g_{\mu\rho}(x)\square_x + R_{\mu\rho}(x) - (1 - \xi^{-1})\nabla_\mu^x\nabla_\rho^x]D_F^{0\nu}(x, x') = \\ = [-g(x)]^{-1/2}\delta_\mu^\nu\delta^n(x - x'), \end{aligned} \quad (3.187)$$

которые выводятся с помощью (3.179) и (3.185) соответственно. В случае спина $1/2$ обобщение (2.84) на искривленное пространство-время имеет вид

$$\hat{S}_F(x, x') = [i\gamma^\mu(x)\nabla_\mu^x + m]G_F(x, x'), \quad (3.188)$$

где G_F — би-спинор¹⁾, удовлетворяющий уравнению (3.49) с $\xi = 1/4$ и $\square_x = g^{\mu\nu}(x)\nabla_\mu^x\nabla_\nu^x$, что следует из подстановки (3.188) в (3.186).

Заметим, что, как и в скалярном случае, если не налагать граничных условий, дифференциальные уравнения для пропагаторов не определяют состояний вакуума, фигурирующих в вариантах выражений (2.80) или (2.86) для искривленного пространства-времени. Эти граничные условия зависят от конкретной рассматриваемой физической системы. Так же как и в скалярном случае, можно получить адиабатические разложения (де Витта — Швингера) для пропагаторов. Для спина $1/2$ такое разложение было построено Банчем и Паркером [83] с помощью импульсного представления, рассмотренного в предыдущем разделе. Результаты для спинов $1/2$ и 1 в рамках метода собственного времени де Витта — Швингера были получены Кристенсеном [114] (см. также [5, 153, 158]). Отдельные члены (имеющие отношение к конформным аномалиям, см. разд. 6.3) в адиабатических разложениях пропагаторов полей высших спинов были получены Кристенсеном и Даффом [115, 117] и Бирреллом [38].

В заключение отметим, что тензор энергии-импульса поля произвольного спина в искривленном пространстве-времени может быть построен путем варьирования действия по метрике:

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{2}{[-g(x)]^{1/2}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}(x)} = \frac{V_{\text{ам}}(x)}{\det[V(x)]} \frac{\delta S}{\delta V_a{}^\nu(x)} \quad (3.189)$$

(множитель $(-g)^{-1/2}$ введен для того, чтобы сделать эту величину тензором, а не тензорной плотностью). В частности,

¹⁾ Термин би-спинор (билинейная функция двух 4-компонентных спиноров) следует отличать от термина биспинор (4-компонентный спинор). — Прим. перев.

тензоры энергии-импульса полей 0, $1/2$ и 1 равны

$$T_{\mu\nu}(s=0) = (1 - 2\xi) \phi_{;\mu} \phi_{;\nu} + \left(2\xi - \frac{1}{2}\right) g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \phi_{;\rho} \phi_{;\sigma} - 2\xi \phi_{;\mu\nu} \phi + \\ + \frac{2}{n} \xi g_{\mu\nu} \phi \square \phi - \xi \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \frac{2(n-1)}{n} \xi R g_{\mu\nu} \right] \phi^2 + \\ + 2 \left[\frac{1}{4} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \xi \right] m^2 g_{\mu\nu} \phi^2, \quad (3.190)$$

$$T_{\mu\nu} \left(s = \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} i \left[\bar{\Psi} \gamma_{(\mu} \nabla_{\nu)} \bar{\Psi} - (\nabla_{(\mu} \bar{\Psi}) \gamma_{\nu)} \Psi \right], \quad (3.191)$$

$$T_{\mu\nu}(s=1) = T_{\mu\nu}^{\text{Максв}} + T_{\mu\nu}^G + T_{\mu\nu}^{\text{дух}}, \quad (3.192)$$

$$T_{\mu\nu}^{\text{Максв}} = \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} - F_{\mu}{}^{\rho} F_{\rho\nu}, \quad (3.193)$$

$$T_{\mu\nu}^G = \xi^{-1} \left\{ A_{\mu} A^0_{;\nu} + A^0_{;\mu} A_{\nu} - g_{\mu\nu} \left[A^0 A^0_{;\sigma\rho} + \frac{1}{2} (A^0_{;\rho})^2 \right] \right\}, \quad (3.194)$$

$$T_{\mu\nu}^{\text{дух}} = -c^*_{;\mu} c^*_{;\nu} - c^*_{;\nu} c_{;\mu} - g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} c^*_{;\rho} c_{;\sigma}. \quad (3.195)$$

Эти выражения получены из (3.189) с плотностями лагранжианов (3.24) и (3.176) для $s=0$ и $s=1/2$ соответственно, а результат для спина 1 получен из суммы плотностей лагранжианов (3.180), (3.182) и (3.183). При выводе выражений для спинов 0 и $1/2$ результаты приведены к симметричной форме с помощью соответствующих уравнений поля; в случае спинов $1/2$ и 1 использовалось интегрирование по частям. Выпишем также некоторые формулы варьирования, полезные при выводе приведенных выше формул:

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \delta g_{\rho\sigma}, \quad \delta (-g)^{1/2} = \frac{1}{2} (-g)^{1/2} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \\ \delta R = -R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + g^{\rho\sigma} g^{\mu\nu} (\delta g_{\rho\sigma;\mu\nu} + \delta g_{\rho\mu;\sigma\nu}), \\ \delta g_{\mu\nu} = -(g_{\mu\rho} V^{\alpha}_{\nu} + g_{\nu\rho} V^{\alpha}_{\mu}) \delta V^{\rho}_{\alpha}. \quad (3.196)$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ ПЛОСКОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

После того как было потрачено столько усилий на построение квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени, читатель, возможно, будет разочарован возвращением к плоскому пространству. Однако плоское пространство еще не означает пространство Минковского.

Здесь будут рассмотрены три основные ситуации, в которых общий формализм квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени дает нетривиальные результаты даже, когда геометрия является плоской. При этом удастся исследовать новые геометрические эффекты благодаря упрощениям, вносимым плоским характером геометрии. В частности, в ряде случаев можно найти $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, не прибегая к полной теории регуляризации и перенормировок в искривленном пространстве, которая развита в гл. 6.

Первый тип эффектов связан с нетривиальной топологией. Здесь не будет обсуждаться рождение частиц, и рассмотрение будет касаться только $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, который оказывается отличным от нуля даже в состоянии вакуума. Это один из немногих случаев рассматриваемой теории, когда имеется непосредственная связь с экспериментом, поскольку возмущение электромагнитного вакуума, создаваемое двумя параллельными проводящими пластинами, действительно наблюдается. Явление притяжения между пластинами, получившее название эффекта Казимира, широко обсуждалось в литературе.

Исследование эффектов, связанных с ограничивающими поверхностями, приводит естественным образом к очень простой, но крайне полезной модели, заслуживающей детального изучения. Речь идет о «движущихся зеркалах» — модели, в которой поверхности, ограничивающие квантованные поля, находятся в движении. Вследствие движения возникает рождение частиц, изучение которого имеет важное эвристическое значение для понимания рассматриваемых далее более сложных ситуаций. В частности, испаряющиеся черные дыры имеют ряд черт, характерных для модели движущихся зеркал определенного вида. Рекомендуем читателю детально разобраться в вычислении коэффициентов преобразования Боголюбова (4.60), которые совпадают с соответ-

ствующими величинами для черных дыр и поэтому их расчет не повторяется в гл. 8.

Третий вопрос, на котором мы останавливаемся в этой главе, также тесно связан с испарением черных дыр, но помимо этого представляет и самостоятельный интерес. Он касается реакции наблюдателя (детектора частиц), движущегося с постоянным ускорением, на вакуум Минковского. Результат — тот факт, что ускоренный наблюдатель воспринимает это состояние как заполненное излучением с тепловым спектром, — является весьма интригующим и проливает свет на взаимосвязь между горизонтами событий, квантовой теорией поля и энтропией. Здесь также основное внимание сосредоточено на обсуждении преобразования Боголюбова (последние три страницы данной главы). Хотя этот вопрос может показаться несколько техническим, он (в особенности это касается аналитических свойств полевых мод) имеет прямое отношение к черным дырам и заслуживает внимательного изучения.

4.1. Двумерное цилиндрическое пространство-время

Простейшее обобщение квантовой теории поля в пространстве Минковского состоит во введении в локально плоское пространство нетривиальной топологии. Наиболее просто такое обобщение осуществляется в двумерном пространстве-времени $R^1 \times S^1$ с компактными (замкнутыми) пространственными сечениями. Расстояние в нем определено как в пространстве Минковского (3.8) или (3.10), но пространственные точки x и $x + L$ отождествлены (L — длина периодичности — «длина окружности вселенной») (рис. 10).

Вследствие замкнутости пространственных сечений полевые моды (2.11) ограничены дискретным множеством (ср. (2.13))

$$u_k = (2L\omega)^{-1/2} e^{i(kx - \omega t)}, \quad (4.1)$$

где $k = 2\pi n/L$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В безмассовом случае $\omega = |k|$ моды $\exp[ik(x - t)]$ с положительными значениями n описывают волны, движущиеся слева направо, а моды $\exp[ik(x + t)]$ с отрицательными n — волны, движущиеся справа налево.

При получении (4.1) были наложены граничные условия периодичности $u_k(t, x) = u_k(t, x + nL)$. Можно также наложить условия антипериодичности $u_k(t, x) = (-1)^n u_k(t, x + nL)$, что снова приводит к модам (4.1), но с $k = 2\pi(n + 1/2)/L$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В последнем случае скалярное поле можно связать с сечением в расслоении, не являющимся прямым произведением; его иногда называют скрученным (twisted) полем (см. [311]).

Вследствие ограничения дискретным множеством мод энергия поля изменяется. В рассматриваемом двумерном случае с помощью (2.26) получаем декартовы компоненты тензора энергии-импульса в виде

$$T_{tt} = T_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2, \quad (4.2)$$

$$T_{tx} = T_{xt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (4.3)$$

Будем вычислять $\langle 0_L | T_{\mu\nu} | 0_L \rangle$, где $|0_L\rangle$ — вакуум, ассоциируемый с дискретными модами (4.1). Это состояние, очевидно, удовлетворяет условию $|0_L\rangle \rightarrow |0\rangle$ при $L \rightarrow \infty$, где $|0\rangle$ — обычный вакуум пространства Минковского (см. [221] по поводу неэквивалентности $|0_L\rangle$ и $|0_{L'}\rangle$ при $L \neq L'$).

Воспользовавшись (2.43) и подставляя моды (4.1), соответствующие вакууму $|0_L\rangle$, получим выражение

$$\langle 0_L | T_{tt} | 0_L \rangle = (1/2L) \sum_{n=-\infty}^{\infty} |k| = (2\pi/L^2) \sum_{n=0}^{\infty} n, \quad (4.4)$$

которое, очевидно, бесконечно. Этого и следовало ожидать, ибо в пространстве $R^1 \times S^1$ рассматриваемая система имеет те же расходимости, что и в пространстве Минковского. Компактификация пространственных сечений может сказаться на низкочастотных модах, но поведение в ультрафиолетовой области не должно измениться.

При расчете энергии вакуума в пространстве Минковского (см. разд. 2.4) ультрафиолетовая расходимость устранялась с помощью нормального упорядочения операторов рождения и уничтожения, связанных с модами (2.11). Для произвольного состояния $|\psi\rangle$ в фоковском пространстве нормальное упорядочение сводится к вычитанию

$$\langle \psi | : T_{\alpha\beta} : | \psi \rangle = \langle \psi | T_{\alpha\beta} | \psi \rangle - \langle 0 | T_{\alpha\beta} | 0 \rangle, \quad (4.5)$$

которое, в частности, обеспечивает равенство $\langle 0 | : T_{\alpha\beta} : | 0 \rangle = 0$. Если считать пространство Минковского накрывающим пространством для $R^1 \times S^1$, то $|0_L\rangle$ можно рассматривать как одно из возможных состояний в фоковском пространстве, порождаемом модами (2.11) [221], и для устранения расходимости в $\langle 0_L | T_{\alpha\beta} | 0_L \rangle$ применить (4.5). (Более строгое обоснование дано

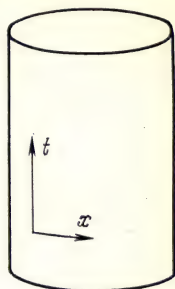


Рис. 10. Двумерное пространство-время с компактными пространственными сечениями ($R^1 \times S^1$). Длина окружности цилиндра равна L .

в работе [320].) В частности,

$$\begin{aligned}\langle 0_L | : T_{tt} : | 0_L \rangle &\equiv \langle 0_L | T_{tt} | 0_L \rangle - \langle 0 | T_{tt} | 0 \rangle = \\ &= \langle 0_L | T_{tt} | 0_L \rangle - \lim_{L' \rightarrow \infty} \langle 0_{L'} | T_{tt} | 0_{L'} \rangle.\end{aligned}\quad (4.6)$$

Поскольку оба слагаемых в правой части (4.6) расходятся по отдельности, вычитание требует дополнительного исследования. Подробное обсуждение дано в гл. 6. Здесь мы воспользуемся процедурой, основанной на введении обрезывающего множителя $e^{-\alpha |k|}$ в расходящиеся суммы типа (4.4), полагая $\alpha \rightarrow 0$ в конце вычисления. Эта процедура получает оправдание в более строгом подходе, развиваемом ниже.

После введения обрезывающего множителя сумма (4.4) становится конечной и легко вычисляется:

$$\langle 0_L | T_{tt} | 0_L \rangle = (2\pi/L^2) \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-2\pi\alpha n/L} = (2\pi/L^2) e^{2\pi\alpha/L} (e^{2\pi\alpha/L} - 1)^{-2}.\quad (4.7)$$

Полученное выражение можно разложить в окрестности $\alpha = 0$:

$$\langle 0_L | T_{tt} | 0_L \rangle = (1/2\pi\alpha^2) - (\pi/6L^2) + O(\alpha^3).$$

В аналогичном виде можно представить и $\langle 0_{L'} | T_{tt} | 0_{L'} \rangle$. Тогда

$$\lim_{L' \rightarrow \infty} \langle 0_{L'} | T_{tt} | 0_{L'} \rangle = 1/2\pi\alpha^2.$$

Подставляя эти выражения в (4.6) и переходя к пределу при $\alpha \rightarrow 0$, находим

$$\langle 0_L | : T_{tt} : | 0_L \rangle = -\pi/6L^2.$$

С помощью аналогичных вычислений можно показать, что $\langle 0_L | : T_{tx} : | 0_L \rangle = 0$.

Хотя величина $\langle T_{\alpha\beta} \rangle$ для каждого из состояний $|0\rangle$ и $|0_L\rangle$ расходится, разность между двумя расходящимися суммами оказывается конечной. Таким образом, если потребовать, чтобы $\langle 0 | : T_{\alpha\beta} : | 0 \rangle = 0$, то состояние $|0_L\rangle$ будет обладать конечной отрицательной плотностью энергии

$$\rho = \langle 0_L | : T_{tt} : | 0_L \rangle = -\pi/6L^2\quad (4.8)$$

и давлением

$$p = \langle 0_L | : T_{xx} : | 0_L \rangle = -\pi/6L^2.\quad (4.9)$$

Эта отрицательная вакуумная энергия распределена с одинаковой плотностью в пространстве $R^1 \times S^1$ и соответствует полной энергии $-\pi/6L$.

Аналогично можно рассчитать энергию вакуума для скрученного поля [311]. Вместо (4.7) в этом случае имеем

$$\begin{aligned}\langle 0_L | T_{tt} | 0_L \rangle &= (\pi/2L^2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} |2n+1| e^{-\pi\alpha |2n+1|/L} = \\ &= (\pi/2L^2) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| e^{-\pi\alpha |n|/L} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2|n| e^{-2\pi\alpha |n|/L} \right] = \\ &= 2[2\pi/(2L)^2] \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-2\pi\alpha n/(2L)} - (2\pi/L^2) \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-2\pi\alpha n/L}, \quad (4.10)\end{aligned}$$

где вторая строчка получается с учетом того, что сумма по нечетным n равна сумме по всем n минус сумма по четным n . Последний член в (4.10) совпадает с суммой (4.7), взятой с обратным знаком, а предыдущий член — с удвоенной суммой (4.7), в которой следует заменить L на $2L$. Поэтому конечную часть ρ можно получить непосредственно из формулы (4.8) в виде

$$\rho = -2\pi/6 (2L)^2 + \pi/6 L^2 = \pi/12 L^2. \quad (4.11)$$

Энергия вакуума для скрученного скалярного поля оказывается равной половине соответствующей энергии для нескрученного поля, взятой с обратным знаком.

Наконец, для безмассового поля со спином $1/2$ с помощью соотношений (2.51) и (3.191) в плоском пространстве-времени находим [139]

$$\langle 0_L | T_{\mu\nu} | 0_L \rangle = \frac{1}{2} i \sum_{\pm s} \sum_k [\bar{v}_{k,s} \gamma_{(\mu} \partial_{\nu)} v_{k,s} - \partial_{(\nu} \bar{v}_{k,s} \gamma_{\mu)} v_{k,s}], \quad (4.12)$$

откуда, воспользовавшись формулами (2.48) и (2.50), получаем

$$\begin{aligned}\langle 0_L | T_{tt} | 0_L \rangle &= - (1/2L) \sum_{\pm s} \sum_k v^\dagger(k, s) v(k, s) = \\ &= - (2/L) \sum_k |k| = \begin{cases} - (8\pi/L^2) \sum_{n=0}^{\infty} n & (\text{нескрученное поле}), \\ - (2\pi/L^2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} |2n+1| & (\text{скрученное поле}). \end{cases} \quad (4.13)\end{aligned}$$

В обоих случаях результат равен просто соответствующему результату для скалярного поля, умноженному на минус четыре.

Спинорные скрученные поля могут быть введены тем же способом, что и скалярные [13, 14, 312]; вакуумная энергия для них была рассчитана в случае различных топологий в работах [20, 159]. В работах [13, 14] доказывается, что в большинстве пространств с нетривиальной топологией, для которых производящий

вакуумный функционал $Z(0, 0)$ (см. (2.129)) инвариантен относительно преобразований Лоренца (3.170) тетрады, необходимо включать в рассмотрение как спинорные нескрученные поля, так и скрученные поля. Таким образом, скрученные поля следует рассматривать не как математический курьез, а как поля, выступающие наравне с обычными.

4.2. Использование функций Грина

Вместо того чтобы непосредственно вычислять тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ (4.2), (4.3) и использовать некоторую обрезавшую функцию при суммировании по модам, результаты предыдущего раздела можно получить более изящным способом с помощью функций Грина, введенных в разд. 2.7.

При вычислениях удобно использовать изотропные координаты u и v (3.9). Соответствующие компоненты $T_{\mu\nu}(u, v)$ для безмассового скалярного поля в двумерном случае имеют простой вид

$$T_{uu} = (\partial_u \phi)^2, \quad (4.14)$$

$$T_{vv} = (\partial_v \phi)^2, \quad (4.15)$$

$$T_{uv} = T_{vu} = \frac{1}{2} \partial_u \phi \partial_v \phi. \quad (4.16)$$

Имеют место соотношения

$$T_{tt} = T_{uu} + T_{vv} + 2T_{uv}, \quad (4.17)$$

$$T_{xx} = T_{uu} + T_{vv} - 2T_{uv}, \quad (4.18)$$

$$T_{tx} = T_{xt} = T_{vv} - T_{uu}. \quad (4.19)$$

Из формул (4.14) и (2.66) следует

$$\langle 0_L | T_{uu}(u, v) | 0_L \rangle = \lim_{v'', v' \rightarrow v} \lim_{u'' \rightarrow u} \partial_{u''} \partial_{u'} \frac{1}{2} D_L^{(1)}(u'', v''; u', v'), \quad (4.20)$$

где введен индекс L у $D^{(1)}$, чтобы показать, что эта функция вычисляется в состоянии вакуума $|0_L\rangle$ пространства $R^1 \times S^1$, построенном в предыдущем разделе. (Напомним, что через D обозначают функции Грина для безмассовых полей.) Выражение (4.20) приведено к форме, симметричной относительно замены (u'', v'') на (u', v') . Можно также построить «термодинамическое состояние» $|\beta_L\rangle$ при температуре $T = (k_B \beta)^{-1}$ с помощью термодинамической функции Грина $D_{L, \beta}^{(1)}$ (обобщая (2.111) на случай пространства $R^1 \times S^1$) вместо $D_L^{(1)}$:

$$\langle \beta_L | T_{uu} | \beta_L \rangle = \lim_{v'', v' \rightarrow v} \lim_{u'' \rightarrow u} \partial_{u''} \partial_{u'} \frac{1}{2} D_{L, \beta}^{(1)}(u'', v''; u', v'), \quad (4.21)$$

причем (4.21) сводится к (4.20) при $\beta \rightarrow \infty$ ($T \rightarrow 0$).

Построим сначала функцию Грина при нулевой температуре, воспользовавшись модами (4.1). Получим

$$\begin{aligned} D_L^{(1)}(u'', v''; u', v') &= \langle 0_L | \{ \phi(u'', v''), \phi(u', v') \} | 0_L \rangle = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [u_k(u'', v'') u_k^*(u', v') + \text{компл. сопр.}] = \\ &= (1/2\pi) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} (e^{-2\pi n i/L} \Delta u + e^{(-2\pi n i/L) \Delta v}) + \text{компл. сопр.}, \quad (4.22) \end{aligned}$$

где $\Delta u = u'' - u'$, $\Delta v = v'' - v'$. При выводе (4.22) бесконечный член с $n = 0$ в сумме был опущен. Эта инфракрасная расходимость (при нулевой частоте) является особенностью безмассового поля в двумерном пространстве-времени. Опущенный член в любом случае исчезает при дифференцировании в (4.21), если оно проводится до перехода к безмассовому пределу.

Поскольку показатели экспонент в (4.22) чисто мнимые, сумма абсолютно не сходится. Функцию Грина $D_L^{(1)}$ следует определить более точно в смысле обобщенных функций; этот вопрос рассмотрен в работе [76]. Здесь мы ограничимся введением в показатель экспоненты бесконечно малой вещественной части соответствующего знака, чтобы сделать сумму абсолютно сходящейся. В рассматриваемых ниже случаях эта операция оказывается достаточной.

Выполнив суммирование в (4.22), находим

$$D_L^{(1)}(u'', v''; u', v') = -(1/4\pi) \ln [16 \sin^2(\pi \Delta u/L) \sin^2(\pi \Delta v/L)]. \quad (4.23)$$

Для скрученного скалярного поля функция $D_L^{(1)}$ определяется выражением во второй строке в (4.22) с заменой n на $n + 1/2$. (Заметим, что в этом случае инфракрасная расходимость отсутствует.) Получаем

$$D_L^{(1)}(u'', v''; u', v') = -(1/4\pi) \ln [\text{tg}^2(\pi \Delta u/2L) \text{tg}^2(\pi \Delta v/2L)]. \quad (4.24)$$

Термодинамическая функция Грина может быть теперь построена по известной $D_L^{(1)}$ в результате суммирования с помощью соотношения (2.111):

$$\begin{aligned} D_{L,\beta}^{(1)} &= -(1/4\pi) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \{16 \sin^2[\pi(\Delta u + im\beta)/L] \times \\ &\times \sin^2[\pi(\Delta v + im\beta)/L] \quad (\text{нескрученное поле}), \quad (4.25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{L,\beta}^{(1)} &= -(1/4\pi) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \{ \text{tg}^2[\pi(\Delta u + im\beta)/2L] \times \\ &\times \text{tg}^2[\pi(\Delta v + im\beta)/2L] \} \quad (\text{скрученное поле}). \quad (4.26) \end{aligned}$$

Слагаемое с $m = 0$ представляет собой функцию Грина $D_L^{(1)}$ при нулевой температуре.

Тензор энергии-импульса теперь строится с помощью (4.21):

$$\begin{aligned}\langle \beta_L | T_{uu} | \beta_L \rangle &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} [- (\pi/4L^2) \sin^{-2}(\pi \Delta u/L)] + \\ &\quad + (\pi/2L^2) \sum_{m=1}^{\infty} \text{sh}^{-2}(\pi m \beta/L) \text{ (нескрученное поле),} \\ \langle \beta_L | T_{uu} | \beta_L \rangle &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} (\pi/16L^2) [1 - \sin^{-2}(\pi \Delta u/2L)] - \\ &\quad - (\pi/8L^2) \sum_{m=1}^{\infty} [\text{ch}^{-2}(\pi m \beta/2L) + \text{sh}^{-2}(\pi m \beta/2L)] \text{ (скрученное поле).}\end{aligned}$$

В пределе нулевой температуры ($\beta \rightarrow \infty$) остаются только первые (не зависящие от m) члены. Как и следовало ожидать, они расходятся как $(\Delta u)^{-2}$ в пределе $\Delta u \rightarrow 0$. Это соответствует бесконечной энергии вакуума. Для перенормировки нужно вычесть

$$\langle 0 | T_{uu} | 0 \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \langle 0_L | T_{uu} | 0_L \rangle = - 1/4\pi \Delta u^2.$$

Переходя к пределу при $\Delta u \rightarrow 0$, получаем конечный результат

$$\begin{aligned}- (\pi/12L^2) + (\pi/2L^2) \sum_{m=1}^{\infty} \text{sh}^{-2}(\pi m \beta/L) \text{ (нескрученное поле),} \\ (\pi/24L^2) + (\pi/8L^2) \sum_{m=1}^{\infty} [\text{ch}^{-2}(\pi m \beta/2L) + \text{sh}^{-2}(\pi m \beta/2L)] \\ \text{(скрученное поле).}\end{aligned}\tag{4.27}$$

Из симметрии $D_{L,\beta}^{(1)}$ относительно замены u на v немедленно следует

$$\langle \beta_L | T_{vv} | \beta_L \rangle = \langle \beta_L | T_{uu} | \beta_L \rangle.\tag{4.28}$$

Учитывая также, что $D_{L,\beta}^{(1)}$ можно представить в виде суммы функции, не зависящей от v , и функции, не зависящей от u , с помощью (4.16) находим

$$\langle \beta_L | T_{uv} | \beta_L \rangle = \langle \beta_L | T_{vu} | \beta_L \rangle = 0.\tag{4.29}$$

Тогда с учетом (4.17) получаем, что плотность энергии выражается величинами (4.27), умноженными на два, что согласуется в пределе нулевой температуры ($\beta \rightarrow \infty$) с формулами (4.8) и (4.11).

4.3. Влияние границ

До сих пор мы ограничивались многообразиями без границ. Но, даже если пространство само по себе не имеет границ, квантованное поле может быть ограничено некоторой областью благодаря присутствию материальных ограничивающих поверхностей. Например, для электромагнитного поля такие ограничения могут возникать при наличии проводящих поверхностей. Это открывает реальную возможность лабораторной проверки некоторых геометрических эффектов, характерных для квантовой теории поля в искривленном пространстве.

Как отмечалось в предыдущем разделе, вакуумное ожидание тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ формально расходится даже в случае плоского пространства-времени. Если топология нетривиальна, разность вакуумных средних для данной топологии и тривиальной топологии оказывается конечной и не равной нулю. Подобным же образом проводящие поверхности изменяют топологию полевых конфигураций, что также приводит к ненулевым вакуумным средним тензора энергии-импульса.

Рассмотрим сначала безмассовое скалярное поле, на которое наложено условие исчезновения на бесконечной плоскости в неограниченном четырехмерном пространстве Минковского [156, 157] (граничные условия Дирихле). Благодаря отражению от поверхности, в качестве которой выберем плоскость $x_3 = 0$, полевые моды не будут иметь форму (2.5). Вместо этого следует использовать функции

$$\sin |k_3| x_3 e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2 - i\omega t}, \quad (4.30)$$

которые обращаются в нуль при $x_3 = 0$. Соответствующее вакуумное состояние также изменится.

Вместо выражения (2.79) для функции Грина с помощью метода изображений найдем следующее представление:

$$D_B^{(1)}(x, x') = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{1}{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2 - (t - t')^2} - \frac{1}{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 + x'_3)^2 - (t - t')^2} \right). \quad (4.31)$$

Эта функция обращается в нуль при $x_3 = 0$ и $x'_3 = 0$. Первый член в (4.31) совпадает с функцией Грина в пространстве Минковского, он имеет квадратичную расходимость при $x \rightarrow x'$; после дифференцирования для получения $\langle 0 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle$ (4.31) будет давать расходимость четвертого порядка. Влияние границы можно выделить путем вычитания из (4.31) выражения (2.79) для функции Грина неограниченного пространства Минковского, иначе говоря, путем отбрасывания первого слагаемого. Остаю-

шийся член в пределе $x \rightarrow x'$ остается конечным. Его следует теперь подставить в четырехмерный аналог формулы (4.20). С помощью (2.27), например, получаем ($m = 0$)

$$\langle 0 | T_{tt} | 0 \rangle_B = \lim_{\substack{t', x'_1, x'_2, x'_3 \rightarrow \\ t'', x''_1, x''_2, x''_3 \rightarrow \\ t, x_1, x_2, x_3}} \frac{1}{4} (\partial_{t''} \partial_{t'} + \partial_{x''_1} \partial_{x'_1} + \partial_{x''_2} \partial_{x'_2} + \partial_{x''_3} \partial_{x'_3}) \times \\ \times [D_B^{(1)}(x'', x') - D^{(1)}(x'', x')] = -1/16\pi^2 x_3^4. \quad (4.32)$$

Аналогично $\langle 0 | T_{ii} | 0 \rangle_B = + (16\pi^2 x_3^4)^{-1}$ (все другие компоненты равны нулю).

Вдали от границы ($x_3 \rightarrow \infty$) вакуумные средние, как и следовало ожидать, обращаются в нуль. Однако вблизи нее они существенно изменяются. Более того, величина (4.32) расходится на границе ($x_3 \rightarrow 0$). Интегрирование по всему пространству приводит к бесконечной энергии вакуума на единицу площади граничной поверхности, несмотря на то что мы уже вычли из $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ бесконечную энергию вакуума в пространстве Минковского.

Нетрудно понять причину появления этой бесконечной поверхностной энергии. Функция Грина (4.31) построена так, что на границе $x_3 = 0$ она обращается в нуль, даже когда $x \rightarrow x'$. С другой стороны, функция $D^{(1)}(x, x')$, задаваемая выражением (2.79), очевидно, обращается в бесконечность на границе при $x \rightarrow x'$. Поэтому при попытке сделать функцию Грина конечной путем вычитания последнего выражения из первого, разность также становится расходящейся на границе. Из формулы (4.31) видно, что второе слагаемое действительно расходится при $x_3 = 0$, когда $x \rightarrow x'$. Таким образом, простое вычитание бесконечных членов, ассоциируемых с безграничным пространством Минковского, позволяет избавиться от расходимости четвертого порядка всюду, кроме точек на границе, где эта расходимость остается в виде члена x_3^{-4} .

Из этих рассуждений ясно, что бесконечная поверхностная энергия будет возникать всегда, если требовать исчезновения поля на граничной поверхности, независимо от ее формы. Однако из того, что величина $D_B^{(1)} - D^{(1)}$ расходится на границе, не обязательно следует существование расходимости $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, поскольку эта последняя величина получается из первой после выполнения довольно сложных операций.

Чтобы исследовать этот вопрос подробнее, выясним общий вид тензора $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ в окрестности единственной плоской границы при $x_3 = 0$ [157]. Из соображений симметрии ясно, что этот тензор может быть построен из $\eta_{\mu\nu}$ и $\hat{x}_3^\mu \hat{x}_3^\nu$, где \hat{x}_3^μ — единичный век-

тор, нормальный к границе. Более того, он может зависеть только от x_3 . Следовательно,

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = f(x_3) \eta^{\mu\nu} + g(x_3) \hat{x}_3^\mu \hat{x}_3^\nu. \quad (4.33)$$

Если наложить ковариантное условие сохранения (см. разд. 6.3)

$$\partial_\mu \langle T^{\mu\nu} \rangle = 0, \quad (4.34)$$

то можно прийти к выводу, что f и g могут различаться только на постоянную. Таким образом, правая часть (4.33) должна иметь вид

$$g(x_3)(\eta^{\mu\nu} + \hat{x}_3^\mu \hat{x}_3^\nu) + \alpha \eta^{\mu\nu},$$

где α — постоянная. След этой величины равен $3g(x_3) + 4\alpha$. Если потребовать, чтобы тензор энергии-импульса имел нулевой след, то получим $g(x_3) = -4\alpha/3 = \text{const}$. Поскольку перенормированный тензор энергии-импульса вакуума должен обращаться в нуль вдали от границы, эта постоянная должна быть равна нулю. Следовательно, перенормированные вакуумные средние $T_{\mu\nu}$ обращаются в нуль для поля, тензор энергии-импульса которого имеет нулевой след. Это справедливо для электромагнитного поля и безмассового нейтринного поля, но не для безмассового скалярного поля с $T_{\mu\nu}$, задаваемым формулой (2.26).

В разд. 3.2 отмечалось, что в искривленном пространстве-времени скалярное уравнение может содержать дополнительный член ξR . Соответствующий оператор тензора энергии-импульса определяется формулой (3.190). Даже в случае плоского пространства-времени формула (3.190) не сводится к (2.26), если $\xi \neq 0$. (Этот любопытный факт становится менее удивительным, если вспомнить, что $T_{\mu\nu}$ получается с помощью варьирования метрики $g_{\mu\nu}$ в лагранжиане поля; поэтому даже в пределе $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$, к которому следует перейти в конце вычисления, остается вклад в $T_{\mu\nu}$ от члена $\xi R \phi^2$ в (3.24).) При выборе значения $\xi = 1/6$, соответствующего конформно-инвариантному скалярному уравнению, след $T_{\mu\nu}$ обращается в нуль:

$$T_{\mu\nu} \left(\xi = \frac{1}{6} \right) = \frac{2}{3} \phi_{;\mu} \phi_{;\nu} - \frac{1}{6} \eta_{\mu\nu} \eta^{\sigma\rho} \phi_{;\sigma} \phi_{;\rho} - \\ - \frac{1}{3} \phi \phi_{;\mu\nu} + \frac{1}{12} \eta_{\mu\nu} \phi \square \phi, \quad (4.35)$$

$$T^\mu{}_\mu = 0. \quad (4.36)$$

Иногда выражение (4.35) называют «новым улучшенным тензором энергии-импульса» [86, 110]. В этом случае и для скалярного поля $\langle 0|T_{\mu\nu}|0 \rangle = 0$ вблизи плоской границы.

Хотя из приведенных соображений следует, что для конформно-инвариантного поля при наличии плоской границы бесконечная энергия вакуума отсутствует, этот вывод существенно связан с симметрией граничной поверхности. Если граница искривлена, бесконечная поверхностная энергия появляется вновь. Можно показать, что в общем случае вблизи искривленной границы [151, 323]

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle \sim \varepsilon^{-3} \chi_{\mu\nu} + O(\varepsilon^{-2})$$

для конформно-инвариантного поля, где ε — (малое) расстояние до граничной поверхности, а $\chi_{\mu\nu}$ — ее вторая фундаментальная форма. Мы вернемся к обсуждению этого вопроса и выяснению физического смысла бесконечной поверхностной энергии в разд. 6.6.

Ограничиваясь здесь рассмотрением конформно-инвариантных полей и плоских поверхностей, обобщим задачу на случай, когда имеется несколько таких поверхностей. Вакуумная энергия электромагнитного поля, заключенного в области между двумя параллельными отражающими плоскостями, была вычислена Казимиром [102]. Ограничения, накладываемые условиями сохранения и обращения в нуль следа, приводят к выражению

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = A \left(\frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} + \hat{x}_3^\mu \hat{x}_3^\nu \right),$$

где A — постоянная, а плоскости считаются ортогональными \hat{x}_3 . Из соображений размерности $A \sim a^{-4}$, где a — расстояние между плоскостями. Расчет [102] показывает, что

$$A = -\pi^2/180a^4 \quad (4.37)$$

для вакуумного состояния.

Постоянная A отлична от нуля, так как присутствие граничных плоскостей делает полевые моды дискретными по квантовому числу, ассоциируемому с направлением x_3 . В этом случае поле испытывает такую же топологическую деформацию, что и в модели $R^1 \times S^1$, рассмотренной в разд. 4.1, и постоянная A может быть вычислена тем же методом. Другой способ состоит в нахождении функции Грина $D_B^{(1)}$ в виде бесконечной суммы по изображениям (соответствующим бесконечному числу отражений между плоскостями).

В случае скалярного поля

$$\begin{aligned} D_B^{(1)}(x, x') = & \\ = & \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3 - an)^2 - (t - t')^2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 + x'_3 - an)^2 - (t - t')^2} \right) \quad (4.38) \end{aligned}$$

обращается в нуль при x_3 или $x'_3 = 0$ и x_3 или $x'_3 = a$, что и требуется в задаче. Бесконечная энергия вакуума устраняется путем отбрасывания слагаемого с $n = 0$. Воспользовавшись далее выражением (4.35), находим

$$\langle 0 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle_B = \frac{-\pi^2}{1440a^4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

в декартовых координатах. Коэффициент в (4.39) равен половине соответствующей величины для электромагнитного поля, поскольку скалярное поле имеет вдвое меньше мод (одно поляризационное состояние вместо двух).

Если квантованное поле находится не в чистом вакуумном состоянии, а при конечной температуре T , то можно заменить $D_B^{(1)}$ в (4.38) термодинамической функцией Грина, т. е. заменить $t - t'$ на $t - t' - im\beta$ (где $\beta = 1/k_B T$) и просуммировать по всем m от $-\infty$ до $+\infty$. Соответствующая плотность энергии между пластинами равна

$$-kTa^{-3}f'(\xi) + a^{-4}f(\xi), \quad f(\xi) = -\frac{1}{8\pi^2} \sum_{m, n=1}^{\infty} \frac{(2\xi)^4}{[n^2 + 4\xi^2 m^2]^2}$$

и $\xi = k_B Ta$. В пределе малых значений произведения Ta температурная поправка к плотности энергии равна $(kT)^3 \zeta(3)/2\pi a$, где ζ — дзета-функция; для больших Ta поправка имеет вид $(1/30)\pi^2(kT)^4$. Для электромагнитного поля соответствующие значения в два раза больше; подробные вычисления можно найти в работе [66].

Существование вакуумных натяжений между параллельными граничными поверхностями приводит к появлению силы притяжения между двумя электрически нейтральными проводящими поверхностями. Расчет Казимира (см. (4.37)) дает для силы, приходящейся на единицу площади поверхности, выражение $F = -\partial E/\partial a = -\pi^2/(240a^4)$. Возникающие благодаря этому механизму силы были измерены экспериментально (см., например, [438, 447]). «Эффект Казимира» явился предметом многочисленных исследований; особенно подробный анализ проведен в работах [18, 19, 339].

Другая задача с плоскими граничными поверхностями была рассмотрена в работах [151, 178]; для вакуумных средних тензора энергии-импульса конформного скалярного поля в области клиновидной формы между двумя наклонными плоскостями было

получено выражение

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \frac{1}{1440r^4\alpha^2} \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - \frac{\alpha^2}{\pi^2} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где α — угол между плоскостями, r — расстояние от линии пересечения до рассматриваемой точки; для пространственной части тензора использованы цилиндрические координаты.

Для случая электромагнитного поля получено выражение [151]

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \frac{1}{720\pi^2 r^4} \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} + 11 \right) \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

В обоих случаях конечный результат можно получить с помощью обычной процедуры вычитания бесконечных вакуумных средних, вычисляемых в безграничном пространстве Минковского¹⁾.

4.4. Движущиеся зеркала

Во всех рассмотренных выше примерах системы были статическими, поэтому вносимые возмущения квантовых состояний приводили к появлению поляризации вакуума, но не к рождению частиц. Если параллельные пластины, описанные в предыдущем разделе в связи с эффектом Казимира, заставить быстро двигаться, то возникнет необратимое изменение энтропии и между пластинами появятся новые кванты. Частицы будут рождаться, даже если движется одна отражающая пластина (зеркало).

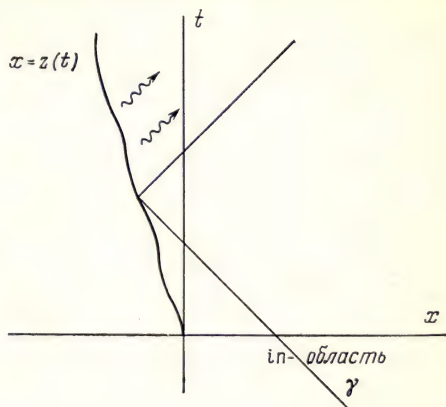
Мы рассмотрим эту задачу подробно для двумерного случая, когда можно использовать конформную тривиальность ситуации. Явных примеров для четырехмерного пространства довольно мало [93, 95, 590*—592*]. Мы будем следовать здесь работам [135, 224].

Предположим, что зеркало (которое в двумерном случае вырождается в точку) движется вдоль мировой линии

$$x = z(t), \quad |\dot{z}(t)| < 1, \quad z(t) = 0, \quad t < 0. \quad (4.40)$$

¹⁾ Эффект Казимира с учетом реальных граничных условий на поверхности металлов (диэлектриков) рассматривается в работе [589*]. — *Прим. перев.*

Рис. 11. Излучение от движущегося зеркала. Скалярное поле удовлетворяет нулевому граничному условию на границе $x = z(t)$. Изотропные лучи, выходящие из \mathcal{I}^- , такие, как γ , отражаются от зеркала и уходят в \mathcal{I}^+ . Волны, отраженные после момента времени $t = 0$, испытывают доплеровский сдвиг частоты вследствие движения зеркала.



Безмассовое скалярное поле ϕ , удовлетворяющее волновому уравнению

$$\square \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} = 0 \quad (4.41)$$

и граничному условию отражения

$$\phi(t, z(t)) = 0, \quad (4.42)$$

имеет следующий набор решений:

$$u_k^{\text{in}}(u, v) = i(4\pi\omega)^{-1/2} (e^{-i\omega v} - e^{-i\omega(2\tau_u - u)}), \quad (4.43)$$

где $\omega = |k|$ и значение τ_u определяется для мировой линии (4.40) из уравнения

$$\tau_u - z(\tau_u) = u. \quad (4.44)$$

Решения (4.43) справедливы в области справа от зеркала. Входящие (распространяющиеся налево) волны $e^{-i\omega v}$ соответствуют стандартным экспоненциальным решениям всюду между \mathcal{I}^- (рис. 11) и поверхностью зеркала, но волны, распространяющиеся направо (отраженные) имеют более сложный вид из-за доплеровского сдвига при отражении от движущегося зеркала. Эта асимметрия между u и v соответствует условию запаздывания (отсутствуют кванты, приходящие из \mathcal{I}^-).

В области справа от зеркала поле ϕ с граничным условием (4.42) можно разложить по модам (4.43):

$$\phi = \sum_{k>0} [a_k u_k^{\text{in}} + a_k^\dagger (u_k^{\text{in}})^*] \quad (4.45)$$

и ввести in-вакуум с помощью соотношения

$$a_k |0, \text{in}\rangle = 0, \quad (4.46)$$

Это состояние и моды (4.43) выбраны в качестве «входящих», поскольку при $t \leq 0$ зеркало находится в покое в точке $z = 0$ в системе координат (u, v) . Тогда $\tau_u = u$, и (4.43) сводится к выражению

$$u_k^{\text{in}} = i(4\pi\omega)^{-1/2} (e^{-i\omega v} - e^{i\omega u}) = (\pi\omega)^{-1/2} \sin \omega x e^{-i\omega t}, \quad t \leq 0, \quad (4.47)$$

которое является положительно-частотным по отношению ко времени t Минковского.

Состояние $|0, \text{in}\rangle$ может рассматриваться как не содержащее частиц при $t < 0$. Действительно, функция Вайтмана в in -области имеет вид

$$\langle \text{in}, 0 | \phi(x) \phi(x') | 0, \text{in} \rangle = - (1/4\pi) \ln [(\Delta u - i\epsilon)(\Delta v - i\epsilon)/(v - u' - i\epsilon)(u - v' - i\epsilon)], \quad (4.48)$$

где $\Delta u = u - u'$, $\Delta v = v - v'$ и $t, t' < 0$. Подставив (4.48) в (3.55), нетрудно убедиться в том, что, несмотря на более сложный вид аргумента под знаком логарифма, инерциальный детектор частиц, движущийся вдоль мировой линии (3.52), который адиабатически выключается вне in -области, не будет регистрировать частиц. Присутствие зеркала не будет возбуждать детектор, даже если зеркало движется по отношению к детектору с постоянной скоростью.

Если зеркало в течение некоторого периода времени движется ускоренно ($t > 0$), полевые моды при $u > 0$ будут искажаться по сравнению со стандартной формой (4.47), принимая общий вид (4.43). Таким образом, движущееся зеркало выполняет ту же роль, что и изменяющаяся геометрия пространства-времени (т. е. гравитационное поле). Заметим, однако, что функции $2\tau_u - u$ в (4.43) остается неизменной вдоль изотропного луча $u = \text{const}$ от поверхности зеркала до \mathcal{I}^+ . Искажение мод происходит внезапным образом (при отражении), а не постепенно в течение времени, когда происходят возмущения геометрии, как это было в гравитационном случае.

Рассмотрим часть решения (4.43), соответствующую волне, движущейся направо, $\exp[-i\omega(2\tau_u - u)]$. В области $u < 0$ эта функция сводится к стандартному выражению $e^{-i\omega u}$, поэтому при $t < 0$ она ассоциируется с обычным физическим вакуумным состоянием, задаваемым соотношением (4.46). С другой стороны, в области $u > 0$ это уже не будет обычная плоская волна, распространяющаяся направо. Поэтому состояние $|0, \text{in}\rangle$ в этой области уже будет не состоянием физического вакуума, а состоянием, содержащим частицы. Таким образом, доплеровское искажение, описываемое более сложной экспонентой в (4.43), соответствует возбуждению полевых мод и рождению частиц. С физической точки зрения это означает, что движущееся зеркало

рождает частицы, уходящие направо вдоль изотропных лучей $u = \text{const.}$

Чтобы убедиться в физической реальности этих частиц, проанализируем показания инерциального детектора частиц в области $u > 0$. Функция Вайтмана в состоянии *in*-вакуума имеет вид

$$D^+(u, v; u', v') = - (1/4\pi) \ln [(p(u) - p(u') - i\epsilon)(v - v' - i\epsilon)/(v - p(u') - i\epsilon) \times \\ \times (p(u) - v' - i\epsilon)], \quad (4.49)$$

где принято

$$p(u) = 2\tau_u - u. \quad (4.50)$$

Для функции $x(t)$ и, следовательно, $p(u)$ общего вида фурье-образ выражения (4.49) отличен от нуля, поэтому при подстановке D^+ в формулу (3.55) получаем ненулевое значение отклика детектора.

В качестве примера рассмотрим движение зеркала по закону, задаваемому в асимптотической области выражением

$$z(t) \rightarrow -t - Ae^{-2\kappa t} + B, \quad t \rightarrow \infty, \quad (4.51)$$

где A, B, κ — положительные постоянные. Поведение этой функции в более ранние моменты времени оказывается несущественным для вычисления потока частиц в асимптотической области $t \rightarrow \infty$. Пример мировой линии, которая сшивается гладким образом (C^1) со статической мировой линией при $t < 0$ дает функция $z(t) = -\ln(\text{ch } \kappa t)$.

Класс траекторий (4.51) представляет особый интерес потому, что отражение от зеркала испытывают только лучи с $v < B$. Все лучи с $v > B$ распространяются без возмущения в левую часть \mathcal{I}^+ (рис. 12). Поэтому луч с $v = B$ представляет собой линию горизонта, причем расположенные эквидистантно лучи с постоянным u при их продолжении в направлении \mathcal{I}^- образуют семейство линий, сгущающихся к горизонту $v = B$. В гл. 8 мы увидим, что аналогичная картина имеет место при коллапсе звезды с образованием черной дыры.

Из формул (4.44) и (4.51) находим

$$p(u) \equiv 2\tau_u - u \rightarrow B - Ae^{-\kappa(u+B)}, \quad u \rightarrow \infty. \quad (4.52)$$

Предположим, что детектор движется по закону

$$x = x_0 + \omega t, \quad \omega = \text{const.} \quad (4.53)$$

Выражение (4.49) для D^+ можно переписать в виде суммы четырех слагаемых, факторизуя аргумент под знаком логарифма. Если в качестве $p(u)$ подставить выражение (4.52) и возникающую при этом функцию D^+ использовать в формуле (3.55),

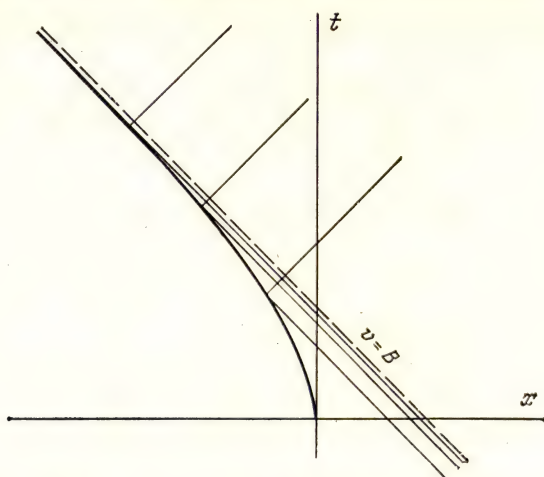


Рис. 12. Мировая линия зеркал $z(t) = -t - Ae^{-2\kappa t} + B$ асимптотически приближается к изотропному лучу $v = B$. Поверхности постоянной фазы из \mathcal{U}^+ при больших значениях времени (эквидистантные изотропные лучи $u = \text{const}$) после отражения от зеркала сгущаются около линии $v = B$. Опережающие (движущиеся влево) лучи, мировые линии которых лежат правее прямой $v = B$, не встречаются с зеркалом. Излучение, возбуждаемое из вакуума при таком движении зеркала, имеет тепловой спектр при больших значениях времени.

определяющей отклик детектора (в предположении адиабатического включения при малых значениях времени), то три из этих слагаемых обращаются в нуль. Остающийся член, в который входит разность $p(u') - p(u)$, приводит к выражению

$$\mathcal{F}(E)/(\text{ед. времени}) =$$

$$= -(1/4\pi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iE\Delta\tau} \ln \left\{ \text{sh} \left[\frac{1}{2} \kappa ((1-\omega)/(1+\omega))^{1/2} \Delta\tau - i\epsilon \right] \right\} d\Delta\tau. \quad (4.54)$$

С помощью тождества

$$\text{sh } x = x \prod_{m=1}^{\infty} (m\pi - ix)(m\pi + ix)/(m\pi)^2$$

и соотношения

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\omega (e^{\beta\omega} - 1)} d\omega \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} -\ln \left[\prod_{m=1}^{\infty} \sigma e^{\gamma} (\beta m + ix) \right],$$

где γ — постоянная Эйлера, правая часть (4.54) приводится к виду

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iE\Delta\tau} \int_0^{\infty} \frac{\cos \left\{ \frac{1}{2} \omega \kappa \Delta\tau [(1-\omega)/(1+\omega)]^{1/2} \right\}}{\omega (e^{\pi\omega} - 1)} d\omega d\Delta\tau.$$

Изменив порядок интегрирования, получаем сумму двух дельта-функций, лишь одна из которых дает вклад в интеграл по ω , приводя к выражению

$$\mathcal{F}(E) \text{ в единицу времени} = \frac{1}{E(e^{E/k_B T} - 1)}, \quad (4.55)$$

где

$$k_B T = (\kappa/2\pi) [(1-\omega)/(1+\omega)]^{1/2}. \quad (4.56)$$

Этот результат означает, что детектор воспринимает постоянный поток частиц от зеркала, распространяющийся в направлении u и имеющий тепловой спектр с температурой (4.56). Множитель $[(1-\omega)/(1+\omega)]^{1/2}$ дает доплеровский сдвиг, возникающий из-за движения детектора со скоростью ω по отношению к излучению (красное и голубое смещение температуры). Если детектор покоится относительно выделенной системы отсчета, в которой зеркало неподвижно на начальной стадии процесса (т. е. $\omega = 0$), то

$$k_B T = \kappa/2\pi. \quad (4.57)$$

Тепловая природа потока излучения от зеркала, движущегося по закону (4.51), может быть также установлена путем непосредственного вычисления коэффициентов боголюбовского преобразования между in- и out-модами. Решения u_k^{in} (4.43) имеют простой вид на \mathcal{I} , но после отражения от зеркала они становятся сложными функциями на \mathcal{I}^+ . С другой стороны, можно ввести моды u_k^{out} , представляющие собой плоские волны на \mathcal{I}^+ , но сложные функции в in-области, т. е. на \mathcal{I}^- . Преобразование Боголюбова между u_k^{in} и u_k^{out} может быть рассчитано для любой пространственноподобной поверхности; для асимптотически изотропной траектории (4.51) удобно вычислять коэффициенты преобразования при $t = 0$ в in-области. Тогда моды u_k^{in} имеют простой вид (4.47), а функции u_k^{out} — более сложную форму.

Для нахождения вида функций u_k^{out} при $t = 0$ заметим, что стандартные движущиеся вправо плоские волны $e^{-i\omega u}$ на \mathcal{I}^+ при продолжении назад по времени и отражении от зеркала в in-область имеют форму волн, распространяющихся влево с более сложной зависимостью от v , а именно $e^{-i\omega f(v)}$. Волны $e^{-i\omega u}$, соответствующие более поздним моментам времени u , имеют на \mathcal{I}^-

форму волн, движущихся влево, причем соответствующие лучи сгущаются к изотропной асимптоте $v = B$. Поэтому $f(v)$ будет быстро меняющейся функцией v в этой области. Из соображений симметрии ясно, что функция f обратна функции ρ (4.52); это означает, что

$$f(v) \sim -\kappa^{-1} \ln[(B-v)/A] - B, \quad v < B, \quad (4.58)$$

в области $v \rightarrow B$. Волны, движущиеся влево в области $v > B$, нас здесь не интересуют, так как они остаются невозмущенными вплоть до \mathcal{I}^+ и не дают вклада в тепловое излучение. Поэтому можно положить $u_k^{\text{out}} = 0$ при $v \geq B$.

Таким образом, достаточно вычислить коэффициенты преобразования Боголюбова между u_k^{in} и той частью u_k^{out} , которая соответствует волнам $e^{-i\omega u}$, движущимся вправо по направлению к \mathcal{I}^+ , т. е. частью $e^{-i\omega f(v)}$ в области $v < B$. Воспользовавшись формулами (3.36), выражающими эти коэффициенты через скалярные произведения ($\bar{u} = u^{\text{in}}$ и $u = u^{\text{out}}$), вычисляем интегралы при $t = 0$ и $v = B$. После интегрирования по частям находим

$$\left. \begin{matrix} \alpha_{\omega'\omega} \\ \beta_{\omega'\omega} \end{matrix} \right\} = \pm (2\pi)^{-1} i(\omega'/\omega)^{1/2} \int_0^B e^{\pm i\omega f(x) - i\omega'x} dx. \quad (4.59)$$

Поскольку функция $f(x)$ быстро изменяется в окрестности точки $x = B$, основной вклад в интеграл дает именно эта область; поэтому в (4.59) опущен граничный член при $x = 0$. Можно также использовать асимптотическую формулу (4.58) для аппроксимации функции $f(x)$ в (4.59) при всех значениях x . Получаемые при этом выражения для коэффициентов Боголюбова хорошо аппроксимируют поток излучения при поздних временах (больших u) в out-области. После этих упрощений интеграл может быть явно вычислен в терминах *неполных* Γ -функций. Более того, поскольку быстро меняющаяся форма волны в окрестности точки $v = B$ соответствует высоким частотам, можно положить $\omega' \rightarrow \infty$ и выразить коэффициенты через обычную Γ -функцию:

$$\left. \begin{matrix} \alpha_{\omega'\omega} \\ \beta_{\omega'\omega} \end{matrix} \right\} = \mp (4\pi^2 \omega \omega')^{-1/2} e^{\pm i\pi\omega/2\kappa} e^{\pm i\omega D - i\omega' B} (\omega')^{\pm i\omega/\kappa} \Gamma(1 \mp i\omega/\kappa), \quad (4.60)$$

где $D = \kappa^{-1} \ln A - B$. Отсюда следует, что

$$|\beta_{\omega'\omega}|^2 = \frac{1}{2\pi\kappa\omega'} \left(\frac{1}{e^{\omega/(k_B T)} - 1} \right), \quad (4.61)$$

где $k_B T$ определяется формулой (4.57). Этот результат согласуется со спектром излучения (4.55).

Заметим, что величина

$$\langle 0, \text{in} | N_{\omega} | \text{in}, 0 \rangle = \int_0^{\infty} |\beta_{\omega'\omega}|^2 d\omega' \quad (4.62)$$

логарифмически расходится. Дело в том, что ускорение зеркала продолжается бесконечное время, а поток излучения не зависит от времени, поэтому в каждой моде накапливается бесконечное число квантов. Результат можно представить в форме плотности квантов на интервале $d\omega$ в единицу времени, если вместо плоских волн рассматривать волновые пакеты. Мы вернемся к обсуждению этого вопроса в гл. 8.

В качестве другого примера расчета коэффициентов Боголюбова для движущихся зеркал рассмотрим гиперболическое движение зеркала назад с постоянным ускорением. Зададим закон движения в виде

$$z(t) = \begin{cases} B - (B^2 + t^2)^{1/2}, & t > 0, \\ 0 & t < 0, \end{cases} \quad (4.63)$$

где B — постоянная. Качественно этот случай не отличается от изображенного на рис. 12; здесь также имеется изотропная асимптота $v = B$. При продолжении out-решений назад во времени к точке $t = 0$ для $v < B$ возникает зависимость вида $e^{-i\omega f(v)}$. Поэтому для расчета коэффициентов Боголюбова можно по-прежнему использовать выражение (4.59), беря в качестве $f(x)$ функцию, соответствующую траектории (4.63). Повторяя приведенные выше рассуждения, находим $f(x) = Bx/(B - x)$, откуда следует

$$\alpha_{\omega'\omega} = i(B/\pi) e^{-i(\omega+\omega')B} K_1(2iB(\omega\omega')^{1/2}), \quad (4.64)$$

$$\beta_{\omega'\omega} = (B/\pi) e^{i(\omega-\omega')B} K_1(2B(\omega\omega')^{1/2}), \quad (4.65)$$

где K_1 — модифицированная функция Бесселя. Мы вернемся к этому примеру в разд. 7.1.

Оказывается возможным также подробно исследовать рождение частиц в области между двумя движущимися зеркалами [224, 365].

4.5. Квантовая теория поля в пространстве Риндлера

В двух из рассмотренных выше примеров детектор регистрирует излучение с тепловым спектром. В разд. 3.3 было показано, что движущийся с постоянным ускорением детектор воспринимает обычное пространство Минковского, как термостат, запол-

ненный излучением, а в предыдущем разделе было установлено, что инерциальный детектор регистрирует тепловой поток излучения от зеркала, движение которого описывается формулой (4.51). С физической точки зрения эти две ситуации различны, и обычно считается, что во втором случае тепловое излучение является в некотором смысле более реальным, чем в первом. Это подтверждается вычислением $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ для обоих случаев (см. разд. 7.1). Но, несмотря на различный физический статус, эти два примера тесно связаны геометрически. Конформное преобразование, «выпрямляющее» мировую линию (4.51), одновременно превращает прямолинейную траекторию инерциального детектора в гиперболическую [135].

Тепловое излучение, воспринимаемое в равномерно ускоренной системе отсчета, можно описать совершенно другим способом, проливающим свет на тесную связь между понятием квантовой частицы и причинной и топологической структурой пространства-времени, что важно при обсуждении квантовых черных дыр. (Подробности, относящиеся к материалу настоящего раздела, можно найти в работах [89, 128, 221, 222, 293, 466, 468].)

Рассмотрим двумерное пространство Минковского с метрикой (3.8) или (3.10), т. е.

$$ds^2 = d\bar{u} d\bar{v} = dt^2 - dx^2. \quad (4.66)$$

(Черта над буквами \bar{u} , \bar{v} , обозначающими изотропные координаты в пространстве Минковского, введена для того, чтобы отличить их от величин, используемых далее.) Под действием координатного преобразования

$$t = a^{-1} e^{a\xi} \operatorname{sh} a\eta, \quad (4.67)$$

$$x = a^{-1} e^{a\xi} \operatorname{ch} a\eta, \quad (4.68)$$

$a = \operatorname{const} > 0$ и $-\infty < \eta, \xi < \infty$, или, что то же самое,

$$\bar{u} = -a^{-1} e^{-a\bar{u}}, \quad (4.69)$$

$$\bar{v} = a^{-1} e^{a\bar{v}}, \quad (4.70)$$

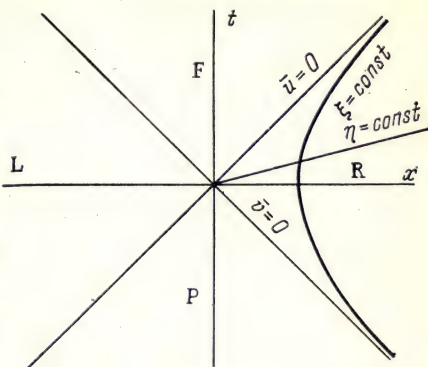
где $u = \eta - \xi$, $v = \eta + \xi$, выражение (4.66) принимает вид

$$ds^2 = e^{2a\xi} du dv = e^{2a\xi} (d\eta^2 - d\xi^2). \quad (4.71)$$

Координаты (η, ξ) покрывают лишь один квадрант пространства Минковского, а именно клин $x > |t|$, изображенный на рис. 13. Линии постоянного η — прямые ($x \sim t$), а линии постоянного ξ — гиперболы

$$x^2 - t^2 = a^{-2} e^{2a\xi} = \operatorname{const}. \quad (4.72)$$

Рис. 13. Координаты Риндлера в пространстве Минковского. В областях R и L линии, отвечающие постоянной временной координате $\eta = \text{const}$, — прямые, проходящие через начало координат, линии $\xi = \text{const}$ — гиперболы (соответствующие мировым линиям равноускоренных наблюдателей), имеющие изотропные асимптоты $\bar{u} = 0$, $\bar{v} = 0$, которые играют роль горизонтов событий. Четыре области R , L , F и P должны быть покрыты отдельными картами. Координаты Риндлера неаналитичны при $\bar{u} = 0$ и $\bar{v} = 0$.



Они представляют собой мировые линии равноускоренных наблюдателей, таких, как в разд. 3.3. Сравнение (3.62) с (4.72) показывает, что

$$ae^{-a\xi} = a^{-1} = \text{собственное ускорение.} \quad (4.73)$$

Таким образом линии, отвечающие большим положительным ξ (вдали от точки $x = t = 0$), соответствуют слабо ускоренным наблюдателям, в то время как гиперболы, близко подходящие к точке $x = t = 0$, соответствуют большим отрицательным ξ и, следовательно, большому ускорению. Все гиперболы асимптотически приближаются к изотропным лучам $\bar{u} = 0$, $\bar{v} = 0$ (или $u = \infty$, $v = -\infty$), что означает стремление скорости наблюдателей к скорости света при $\eta \rightarrow \pm\infty$. Собственное время ускоренных наблюдателей τ связано с ξ и η соотношением

$$\tau = e^{a\xi}\eta. \quad (4.74)$$

Координаты (η, ξ) образуют систему координат Риндлера [404], а часть пространства Минковского $x > |t|$ известна как риндлеровский клин. Равномерно ускоренных наблюдателей иногда называют риндлеровскими наблюдателями.

Второй клин Риндлера $x < |t|$ можно получить, отражая сначала ось t , а затем ось x . Для этого достаточно изменить знаки в правых частях уравнений преобразования (4.67) — (4.70). Будем обозначать левый и правый клинья через L и R соответственно. Заметим, что изменение знаков координат в L означает изменение направления времени: возрастание t соответствует убыванию η .

Интересна причинная структура клина Риндлера. Поскольку риндлеровские наблюдатели (находящиеся при постоянном значении пространственной координаты ξ) приближаются, но не пересекают изотропных лучей $u = \infty$, $v = -\infty$, эти лучи являются

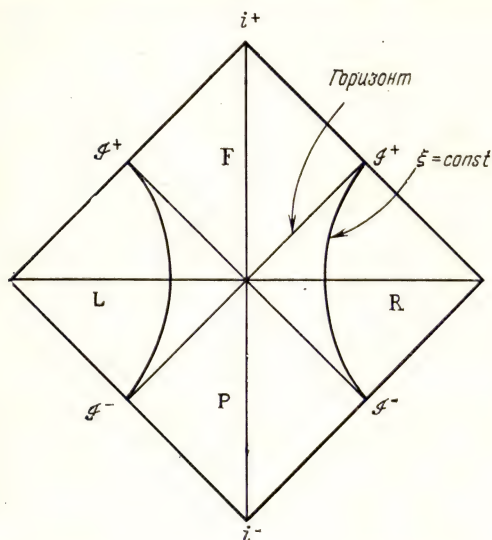


Рис. 14. Конформная диаграмма системы Риндлера. Области R , L , F и P на диаграмме имеют вид ромбов. Времениподобная линия $\xi = \text{const}$ пересекает \mathcal{J}^\pm , а не i^\pm . Ясно, что события в области L не могут быть наблюдаемы из R , поэтому изотропный луч $\bar{u} = 0$ ($u = \infty$) играет роль горизонта событий.

горизонтами событий. Например, никакое событие в L нельзя наблюдать из R и наоборот, так как события в L могут быть связаны с событиями в R лишь мировыми линиями, являющимися на некотором участке пространственноподобными. Поэтому области L и R представляют собой две причинно не связанные вселенные. На рис. 13 отмечены также остающиеся области будущего (F) и прошлого (P). События в P и F могут быть связаны изотропными лучами с событиями в L и R .

Эта причинная структура может быть также изображена на конформной диаграмме Пенроуза, как показано на рис. 14. Риндлеровские наблюдатели пересекают \mathcal{J}^\pm , а не i^\pm , как асимптотически инерциальные наблюдатели. Поэтому изотропный луч $u = \infty$ является горизонтом событий будущего, а события в области F не могут быть причиной событий в имеющей форму ромба области R .

Обратимся к квантованию безмассового скалярного поля в двумерном пространстве Минковского. Волновое уравнение

$$\square \phi \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}} = 0 \quad (4.75)$$

имеет стандартные ортонормированные решения в виде плоских волн

$$\bar{u}_k = (4\pi\omega)^{-1/2} e^{ikx - i\omega t} \quad (4.76)$$

(т. е. (2.11) при $n = 2$), где $\omega = |k| > 0$ и $-\infty < k < \infty$. Эти решения являются положительно-частотными по отношению к

времениподобному вектору Киллинга ∂_t , т. е. они удовлетворяют уравнению

$$\mathcal{L}_{\partial_t} \bar{u}_k = -i\omega \bar{u}_k. \quad (4.77)$$

Решения при $k > 0$ представляют собой волны

$$(4\pi\omega)^{-1/2} e^{i\omega\bar{v}}, \quad (4.78)$$

движущиеся направо вдоль лучей $\bar{u} = \text{const}$, а решения при $k < 0$ — волны, движущиеся налево вдоль $\bar{v} = \text{const}$

$$(4\pi\omega)^{-1/2} e^{-i\omega\bar{v}}. \quad (4.79)$$

Вакуумное состояние Минковского $|0_M\rangle$ и соответствующее пространство Фока получаются в результате разложения ϕ по модам \bar{u}_k , как было объяснено в разд. 2.2.

В риндлеровских областях R и L можно принять другой способ квантования, основанный на использовании не мод \bar{u}_k , а их риндлеровских двойников u_k . Метрика (4.71) конформна всему пространству Минковского, так как при конформном преобразовании $g_{\mu\nu} \rightarrow e^{-2\alpha\xi} g_{\mu\nu}$ выражение (4.71) сводится к $d\eta^2 - d\xi^2$ при $-\infty < \eta, \xi < \infty$. Поскольку волновое уравнение конформно-инвариантно, мы можем переписать его в координатах Риндлера (см. (3.150)) в виде

$$e^{2\alpha\xi} \square \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} = 0, \quad (4.80)$$

а соответствующие решения представить в виде

$$u_k = (4\pi\omega)^{-1/2} e^{ik\xi \pm i\omega\eta}, \quad \omega = |k| > 0, \quad -\infty < k < \infty. \quad (4.81)$$

Верхний знак в (4.81) относится к области L , а нижний — к области R . Изменение знака можно понимать как обращение направления времени в L либо как выражение того, что волна, движущаяся в области R направо, переходит в область возрастающих ξ , в области L такая же волна перемещается в область убывающих ξ . В любом случае моды (4.81) удовлетворяют условию ортонормированности (3.29). Они являются положительно-частотными по отношению к времениподобному вектору Киллинга $+\partial_\eta$ в R и $-\partial_\eta$ в L , удовлетворяя уравнению

$$\mathcal{L}_{\pm\partial_\eta} u_k = -i\omega u_k \quad (4.82)$$

(в R и L соответственно) вместо (4.77).

Совпадение функционального вида (4.81) и (4.76) есть следствие конформной тривиальности системы (пространство Риндлера конформно пространству Минковского, а волновое уравнение (2.1) конформно-инвариантно).

Введем функции

$$R u_k = \begin{cases} (4\pi\omega)^{-1/2} e^{ik\xi - i\omega\eta} & \text{в области } R, \\ 0 & \text{в области } L, \end{cases} \quad (4.83)$$

$$L u_k = \begin{cases} (4\pi\omega)^{-1/2} e^{ik\xi + i\omega\eta} & \text{в области } L, \\ 0 & \text{в области } R. \end{cases} \quad (4.84)$$

Набор решений (4.83) является полным в риндлеровской области R , в то время как набор (4.84) — полным в области L , но ни один из них в отдельности не полон во всем пространстве Минковского. Однако оба набора вместе образуют полную систему в пространстве Минковского, причем линии $\eta = \text{const}$, пересекающие обе области, являются поверхностями Коши для всего пространства-времени. Поэтому моды (4.83) и (4.84) можно аналитически продолжить также в области F и P [59, 60] (a становится мнимым). Таким образом, риндлеровские моды оказываются столь же пригодными в качестве базиса при квантовании поля ϕ , как и обычные моды (4.76) в пространстве Минковского.

Квантованное поле можно представить в виде разложения по любому набору

$$\phi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_k \bar{u}_k + a_k^\dagger \bar{u}_k^*) \quad (4.85)$$

(см. (2.17)) либо

$$\phi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (b_k^{(1)} L u_k + b_k^{(1)*} L u_k^* + b_k^{(2)} R u_k + b_k^{(2)*} R u_k^*), \quad (4.86)$$

что приводит к двум различным фоковским пространствам и двум вакуумным состояниям $|0_M\rangle$ и $|0_R\rangle$ (индексы M и R соответствуют пространствам Минковского и Риндлера), которые определены соотношениями

$$a_k |0_M\rangle = 0, \quad (4.87)$$

$$b_k^{(1)} |0_R\rangle = b_k^{(2)} |0_R\rangle = 0. \quad (4.88)$$

Неэквивалентность этих вакуумных состояний следует из структуры риндлеровских мод (4.81). Вследствие изменения знака в показателе экспоненты при $\bar{u} = \bar{v} = 0$ (точка «перекрывания» областей L и R) функции $R u_k$ не переходят гладким образом в $L u_k$ при переходе из R в L . Это означает, что при переходе от $\bar{u} < 0$ к $\bar{u} > 0$ (или от $\bar{v} < 0$ к $\bar{v} > 0$) моды, распространяющиеся вправо (или влево), не аналитичны в этой точке. В противоположность этому положительно-частотные моды Минковского (4.78) и (4.79) аналитичны не только на вещественной

оси \bar{u} (или \bar{v}), но являются аналитическими и ограниченными функциями во всей нижней полуплоскости комплексной переменной \bar{u} (или \bar{v}). Это свойство аналитичности остается справедливым для *любых* положительно-частотных решений, т. е. любых линейных комбинаций положительно-частотных мод Минковского. Поэтому риндлеровские моды в силу их неаналитичности при $\bar{u} = \bar{v} = 0$ не могут быть линейной комбинацией лишь положительно-частотных мод Минковского, но должны также содержать примесь отрицательных частот. Напомним, что перемешивание положительных и отрицательных частот, как было показано в разд. 3.2, означает, что вакуум не может быть тем же самым, т. е. вакуум, связанный с одним набором мод, содержит частицы, ассоциируемые с другим набором решений.

Чтобы выяснить, какие из риндлеровских частиц присутствуют в вакууме Минковского, нужно построить преобразование Боголюбова между двумя наборами решений. Это можно сделать, воспользовавшись выражениями (3.36), представляющими собой по существу фурье-образы риндлеровских мод. Другой, более изящный способ, предложенный Унру [468], основан на наблюдении, что хотя $L u_k$ и $R u_k$ неаналитичны, две (ненормированные) линейные комбинации

$$R u_k + e^{-\pi\omega/a} L u_{-k}^*, \quad (4.89)$$

$$R u_{-k}^* + e^{\pi\omega/a} L u_k \quad (4.90)$$

аналитичны и ограничены для всех вещественных \bar{u} и \bar{v} и всюду в нижних полуплоскостях комплексных переменных \bar{u} и \bar{v} .

Чтобы убедиться в этом, перепишем (4.89) и (4.90) в координатах Минковского, в которых эти выражения оказываются пропорциональными

$$\begin{aligned} \bar{u}^{i\omega/a}, & \quad k > 0, \\ \bar{v}^{-i\omega/a}, & \quad k < 0, \end{aligned} \quad (4.91)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}^{i\omega/a}, & \quad k > 0, \\ \bar{u}^{-i\omega/a}, & \quad k < 0 \end{aligned} \quad (4.92)$$

($\omega = |k|$) соответственно для всех \bar{u} , \bar{v} в области от $-\infty$ до ∞ (т. е. как в L , так и в R); они явно аналитичны и в точке $\bar{u} = \bar{v} = 0$. Они также аналитичны в нижних полуплоскостях комплексных переменных \bar{u} и \bar{v} , если выбрать разрез по переменным, стоящим в показателях степеней в (4.91) и (4.92), лежащим в верхней полуплоскости (т. е. $\ln(-1) = -i\pi$, что определяет знаки показателей экспонент $e^{\pm\pi\omega/a}$ в (4.89) и (4.90)).

Поскольку моды (4.89) и (4.90) обладают теми же аналитическими свойствами, что и моды Минковского \bar{u}_k , ассоциируемое с ними вакуумное состояние должно совпадать с $|0_M\rangle$ (см.

замечание на с. 53). Таким образом, вместо (4.85) поле ϕ можно разложить по величинам (4.89) и (4.90):

$$\phi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [2 \operatorname{sh}(\pi\omega/a)]^{-1/2} [d_k^{(1)}(e^{\pi\omega/2a} R u_k + e^{-\pi\omega/2a} L u_{-k}^*) + d_k^{(2)}(e^{-\pi\omega/2a} R u_{-k}^* + e^{\pi\omega/2a} L u_k)] + \text{эрмит. сопр.}, \quad (4.93)$$

где операторы уничтожения теперь удовлетворяют соотношениям

$$d_k^{(1)} |0_M\rangle = d_k^{(2)} |0_M\rangle = 0 \quad (4.94)$$

и введен нормировочный множитель. Операторы $b_k^{(1,2)}$ можно связать с операторами $d_k^{(1,2)}$ с помощью скалярных произведений $(\phi, R u_k)$, $(\phi, L u_k)$, подставляя сначала ϕ , заданное разложением (4.86), а затем разложением (4.93). Получаем

$$b_k^{(1)} = [2 \operatorname{sh}(\pi\omega/a)]^{-1/2} [e^{\pi\omega/2a} d_k^{(2)} + e^{-\pi\omega/2a} d_k^{(1)\dagger}], \quad (4.95)$$

$$b_k^{(2)} = [2 \operatorname{sh}(\pi\omega/a)]^{-1/2} [e^{\pi\omega/2a} d_k^{(1)} + e^{-\pi\omega/2a} d_k^{(2)\dagger}]. \quad (4.96)$$

Эти преобразования Боголюбова определяют искомую связь между состояниями $|0_R\rangle$ и $|0_M\rangle$.

Рассмотрим теперь ускоренную риндлеровскую систему отсчета при $\xi = \text{const}$. Из соотношения (4.74) видно, что собственное время в такой системе пропорционально η . Поэтому для риндлеровских наблюдателей вакуумным состоянием будет $|0_R\rangle$, ассоциируемое с положительно-частотными модами по отношению к η . Таким образом, согласно (4.86), риндлеровский наблюдатель в L (соответственно в R) будет обнаруживать частицы, для которых оператор числа квантов есть $b_k^{(1)\dagger} b_k^{(1)}$ (соответственно $b_k^{(2)\dagger} b_k^{(2)}$). Если поле находится в состоянии $|0_M\rangle$ (т. е. лишено обычных частиц в пространстве Минковского), то воспользовавшись соотношениями (4.95) и (4.96) можно показать, что риндлеровский наблюдатель обнаружит

$$\langle 0_M | b_k^{(1,2)\dagger} b_k^{(1,2)} | 0_M \rangle = e^{-\pi\omega/a} / [2 \operatorname{sh}(\pi\omega/a)] = (e^{2\pi\omega/a} - 1)^{-1} \quad (4.97)$$

частиц в состоянии k . Это выражение представляет собой в точности планковский спектр для излучения при температуре $T_0 = a/2\pi k_B$. Температура T , воспринимаемая ускоренным наблюдателем, дается соотношением Толмена

$$T = (g_{00})^{-1/2} T_0 \quad (4.98)$$

(см., например, [335, 460] или [17]). Здесь g_{00} — компонента метрики (4.71), в которой ускоренный наблюдатель имеет постоянную пространственную координату. Воспользовавшись соотношениями (4.73) и (4.98), получим $T = 1/(2\pi a k_B)$ в точном

согласии с формулой (3.68), найденной для ускоренного детектора в пространстве Минковского. Частицы, обнаруживаемые таким наблюдателем, часто называют *риндлеровскими частицами*. Квантовая теория поля для ускоренных наблюдателей и соответствующие термодинамические эффекты рассмотрены с большой общностью в работе [416]. Возможные физические эффекты исследованы в работах [25, 207].

Здесь предсказывается тепловой спектр частиц с точки зрения ускоренного наблюдателя в плоском пространстве, но с помощью конформного преобразования можно получить такой же тепловой спектр для инерциального наблюдателя в искривленном пространстве. В этом состоит так называемый эффект Хокинга (гл. 8).

ПРИМЕРЫ ДЛЯ ИСКРИВЛЕННОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Эта глава посвящена прямым применениям квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени, развитой в гл. 3. Рассматривается рождение частиц зависящими от времени гравитационными полями на примерах различных расширяющихся и сжимающихся космологических моделей. Большинство моделей относится к типу однородных изотропных пространств Робертсона — Уокера, выбор которых обусловлен либо их простотой, либо стремлением проиллюстрировать определенные аспекты формализма.

Здесь приведены все основные случаи, которые рассматривались в литературе. Вселенная Милна (с технической точки зрения плоское пространство) и пространство де Ситтера особенно полезны при выяснении роли принципа адиабатичности в приписывании некоторому квантовому состоянию физического содержания. Пространство де Ситтера замечательно также тем, что это единственная космологическая модель с зависимостью от времени, для которой удастся явно рассчитать всеми известными методами как рождение частиц, так и поляризацию вакуума (что отложено до разд. 6.4).

Небольшой, но важный разд. 5.5 посвящен классификации и установлению соотношений между вакуумными состояниями в пространствах, связанных конформными преобразованиями. Этот вопрос также имеет отношение к «тепловым» аспектам теории. Мы будем возвращаться к нему при вычислении $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ в пространствах Робертсона — Уокера в гл. 6 и 7.

Последний раздел представляет собой попытку выхода за рамки простых моделей Робертсона — Уокера; он относится к анизотропной космологии. Этот вопрос — один из центральных в современной космологической теории, поскольку наблюдаемая высокая степень изотропии вселенной не имеет адекватного объяснения. Здесь теория снова входит в контакт с реальным миром, хотя и довольно ограниченным и модельно-зависимым образом. Представляется вероятным, что квантовое рождение частиц играло важную роль в формировании состава и определении физического состояния первичной космологической материи. Более того, обратное воздействие квантовых эффектов на

гравитационную динамику, обсуждаемое в гл. 6 и 7, играло важную роль в сглаживании первичной анизотропии. Возникающая в результате энтропия, определяемая квантовыми частицами, остается и сейчас, что приводит к наблюдаемым ограничениям на квантовые модели ранней вселенной.

5.1. Пространства Робертсона — Уокера

Большинство примеров, рассматриваемых в этой главе, относится к полям в пространствах Робертсона — Уокера специального вида. Эти пространства важны, поскольку соответствующие космологические модели хорошо согласуются с наблюдениями. Пространства Робертсона — Уокера с плоскими пространственными сечениями обсуждались в разд. 3.4—3.6. Мы начинаем со сводки основных соотношений для них и далее проводим обобщение на случай гиперболических и сферических пространственных сечений. Рассматриваются скалярные поля, обобщение на поля высших спинов может быть проведено аналогично тому, как это сделано в разд. 3.8.

Элемент длины для n -мерных пространств Робертсона — Уокера с плоскими пространственными сечениями имеет вид

$$ds^2 = C(\eta) \left[d\eta^2 - \sum_{i=1}^{n-1} (dx^i)^2 \right]. \quad (5.1)$$

Разложение поля ϕ по модам (3.30) записывается в виде

$$\phi(x) = \int d^{n-1}k [a_k u_k(x) + a_k^\dagger u_k^*(x)] \quad (5.2)$$

Моды можно представить после разделения переменных в виде

$$u_k(x) = (2\pi)^{(1-n)/2} e^{ik \cdot x} C^{(2-n)/4}(\eta) \chi_k(\eta), \quad (5.3)$$

где $k = |\mathbf{k}| = \left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i^2 \right)^{1/2}$, а χ_k удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 \chi_k}{d\eta^2} + \{k^2 + C(\eta)[m^2 + (\xi - \xi(\eta))R(\eta)]\} \chi_k = 0, \quad (5.4)$$

$$\xi(\eta) \equiv \frac{1}{4} [(n-2)/(n-1)]. \quad (5.5)$$

Условие нормировки (3.29) сводится к условию на вронскиан решений χ_k

$$\chi_k \partial_\eta \chi_k^* - \chi_k^* \partial_\eta \chi_k = i. \quad (5.6)$$

Эти соотношения нетрудно обобщить на случай пространств Робертсона — Уокера с искривленными пространственными сечениями. Для простоты ограничимся четырехмерными пространствами; уравнения, которые допускают обобщение на произвольное

число измерений, могут быть найдены в работе [21]. Элемент длины Робертсона — Уокера в общем случае имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \sum_{i,j=1}^3 h_{ij} dx^i dx^j, \quad (5.7)$$

где

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^3 h_{ij} dx^i dx^j &= (1 - Kr^2)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) = \\ &= d\chi^2 + f^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$f(\chi) = \begin{cases} \sin \chi, & 0 \leq \chi \leq 2\pi, \quad K = +1, \\ \chi, & 0 \leq \chi \leq \infty, \quad K = 0, \\ \operatorname{sh} \chi, & 0 \leq \chi < \infty, \quad K = -1. \end{cases} \quad (5.9)$$

Выражение (5.8) дает элемент длины для гиперболического, плоского и замкнутого пространственных сечений при $K = -1, 0, 1$ соответственно. Вводя $C(\eta) = a^2(t)$, где η — параметр конформного времени, задаваемый выражением

$$\eta = \int^t a^{-1}(t') dt', \quad (5.10)$$

можно переписать элемент длины (5.7) в форме

$$ds^2 = C(\eta) \left(d\eta^2 - \sum_{i,j=1}^3 h_{ij} dx^i dx^j \right). \quad (5.11)$$

Вводя величины $\Upsilon = (1 - Kr^2)^{-1}$ и $D = \dot{C}/C$, где точка обозначает производную по η , запишем отличные от нуля символы Кристоффеля для метрики (5.11) (индексы 0, 1, 2, 3 соответствуют η, r, θ, ϕ соответственно) в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{1}{2} D, & \Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2} D\Upsilon, & \Gamma_{22}^0 &= \frac{1}{2} Dr^2, \\ \Gamma_{33}^0 &= \frac{1}{2} Dr^2 \sin^2 \theta, & \Gamma_{11}^1 &= K r \Upsilon, & \Gamma_{22}^1 &= -r \Upsilon^{-1}, \\ \Gamma_{33}^1 &= -r \Upsilon^{-1} \sin^2 \theta, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = 1/r, \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{23}^3 &= \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned} \quad (5.12)$$

С помощью (5.12) можно вычислить ненулевые компоненты тензора Риччи и скалярную кривизну:

$$R_{00} = \frac{3}{2} \dot{D}, \quad R_{11} = -\frac{1}{2} (\dot{D} + D^2) \Upsilon - 2K\Upsilon, \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} R_{22} &= \Upsilon^{-1} r^2 R_{11}, & R_{33} &= \sin^2 \theta R_{22}, \\ R &= C^{-1} \left[3\dot{D} + \frac{3}{2} D^2 + 6K \right]. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Скалярное поле ϕ удовлетворяет уравнению (3.26) с R , даваемым формулой (5.14). Его разложение по модам можно представить в виде

$$\phi(x) = \int d\tilde{\mu}(k) [a_k u_k(x) + a_k^\dagger u_k^*(x)], \quad (5.15)$$

где мера $\tilde{\mu}(k)$ будет определена ниже. Разделение переменных осуществляется следующим образом:

$$u_k(x) = C^{-1/2}(\eta) \mathcal{Y}_k(x) \chi_k(\eta), \quad (5.16)$$

где $x = (r, \theta, \phi)$ или (χ, θ, ϕ) , а $\mathcal{Y}_k(x)$ — решение уравнения

$$\Delta^{(3)} \mathcal{Y}_k(x) = -(k^2 - K) \mathcal{Y}_k(x). \quad (5.17)$$

В (5.17) $\Delta^{(3)}$ — лапласиан в трехмерном пространстве с метрикой h_{ij} :

$$\Delta^{(3)} \mathcal{Y}_k = h^{-1/2} \partial_i (h^{1/2} h^{ij} \partial_j \mathcal{Y}_k), \quad (5.18)$$

$h = \det(h_{ij})$. При этом функции χ_k удовлетворяют уравнению (5.4) при $n = 4$, $(\xi(4) = 1/6)$. Далее, если функции \mathcal{Y}_k нормировать соотношением

$$\int d^3x h^{1/2} \mathcal{Y}_k(x) \mathcal{Y}_{k'}^*(x) = \delta(k, k'), \quad (5.19)$$

где $\delta(k, k')$ — дельта-функция по отношению к мере $\tilde{\mu}$:

$$\int d\tilde{\mu}(k') f(k') \delta(k, k') = f(k), \quad (5.20)$$

то условие нормировки (3.29) снова сводится к (5.6).

Собственные функции \mathcal{Y}_k трехмерного лапласиана имеют вид [390]

$$\mathcal{Y}_k(x) = \begin{cases} (2\pi)^{-3/2} e^{ik \cdot x}, & \mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3) \quad (K=0), \\ \Pi_{kJ}^{(\pm)}(\chi) Y_J^M(\theta, \phi), & k = (k, J, M) \quad (K = \pm 1), \end{cases} \quad (5.21)$$

где

$$-\infty < k_i < \infty, \quad k = |k| \quad (K=0),$$

$$M = -J, -J+1, \dots, J;$$

$$\begin{cases} J=0, 1, \dots, k-1; & k=1, 2, \dots, \quad (K=1), \\ J=0, 1, \dots; & 0 < k < \infty \quad (K=-1). \end{cases} \quad (5.22)$$

Здесь Y_J^M — сферические гармоники. Функции $\Pi^{(-)}$ определены соотношением (см., например, [21, 163])

$$\Pi_{kJ}^{(-)}(\chi) = \left\{ \frac{1}{2} \pi k^2 (k^2 + 1) \dots [k^2 + J^2] \right\}^{-1/2} \operatorname{sh}^J \chi \left(\frac{d}{d \operatorname{ch} \chi} \right)^{1+J} \cos k\chi. \quad (5.23)$$

Функции $\Pi_{kJ}^{(+)}(\chi)$ можно получить из $\Pi_{kJ}^{(-)}(\chi)$ заменой k на $-ik$ и χ на $-i\chi$ (см., например, [340]).

В соответствии с этими определениями мера $\tilde{\mu}(k)$ задается следующим образом:

$$\int d\tilde{\mu}(k) = \begin{cases} \int d^3k & (K=0), \\ \sum_{k, J, M} & (K=1), \\ \int_0^\infty dk \sum_{J, M} & (K=-1). \end{cases} \quad (5.24)$$

В заключение заметим, что пространственную часть разложения по модам можно также записать в полиномах Гегенбауэра вместо функций $\Pi^{(+)}$ (см., например, [202]).

5.2. Статические пространства Робертсона — Уокера

Простейшими примерами, к которым можно применить полученные выше соотношения, являются статические пространства, для которых $C(\eta) = c = a^2 = \text{const}$. Статическое пространство с плоскими пространственными сечениями ($K=0$) есть, конечно, пространство Минковского, которое мы не будем более здесь рассматривать. Рассмотрим случай замкнутой ($K=1$) эйнштейновской вселенной [188] и случай статического пространства-времени с гиперболическими пространственными сечениями ($K=-1$).

Для этих пространств скалярная кривизна (5.14) сводится к

$$R = 6K/c, \quad (5.25)$$

что позволяет сразу записать нормированные решения уравнения (5.4) в четырехмерном случае:

$$\chi_k(\eta) = (2\omega_k)^{-1/2} e^{-i\omega_k \eta}, \quad (5.26)$$

где

$$\omega_k^2 = k^2 + \mu^2 = k^2 + cm^2 + (6\xi - 1)K. \quad (5.27)$$

Из соотношения (5.10) следует, что $\eta = t/a$, поэтому решения (5.26) являются положительно-частотными по отношению к векторам Киллинга ∂_η и ∂_t . Поскольку пространства статические и имеют глобальные времениподобные векторы Киллинга, определение частиц здесь столь же однозначно, как и в пространстве Минковского. В частности, используя (5.16) и (5.26) для построения положительно-частотных решений

$$u_k(x) = (2c\omega_k)^{-1/2} \mathcal{U}_k(x) e^{-i\omega_k \eta} \quad (5.28)$$

в разложении (5.15), определяем вакуумное состояние $|0\rangle$ требованием

$$a_k |0\rangle = 0. \quad (5.29)$$

Можно ожидать, что этот вакуум будет физически аналогичен вакууму в пространстве Минковского; в справедливости этого предположения можно непосредственно убедиться, рассматривая детекторы частиц. Функция Вайтмана в эйнштейновской вселенной вычислена Даукером [167] (см. также [77, 124, 174]), который получил

$$G^+(x, x') = \frac{i\mu}{8\pi c \sin(\Delta\chi)} \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(\Delta\chi + 2\pi n) H_1^{(2)} \{ \mu [(\Delta\eta - i\varepsilon)^2 - (\Delta\chi + 2\pi n)^2]^{1/2} \}}{[(\Delta\eta - i\varepsilon)^2 - (\Delta\chi + 2\pi n)^2]^{1/2}}, \quad (K = +1), \quad (5.30)$$

где H — функция Ханкеля. Здесь, как обычно, введены обозначения

$$\Delta\chi = \chi - \chi', \quad \Delta\eta = \eta - \eta' \quad (5.31)$$

и без потери общности, ввиду изотропии пространства, оси координат выбраны так, что $\phi = \phi'$, $\theta = \theta'$. Функция Вайтмана представляет собой сумму положительно-частотных вайтмановских функций в пространстве Минковского (ср. (2.77)). Используя это обстоятельство, нетрудно показать с помощью (3.55), что детектор, находящийся в покое в системе координат (χ, η) , не будет регистрировать частиц.

Для последующих приложений отметим, что в предельном случае безмассового поля с конформной связью ($m \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow 1/6$, следовательно, $\mu \rightarrow 0$) выражение (5.30) сводится к времени была вычислена Банчем [70]:

$$D^+(x, x') = \frac{1}{8\pi^2 c [\cos(\Delta\eta - i\varepsilon) - \cos(\Delta\chi)]} \quad (K = +1). \quad (5.32)$$

Функция Вайтмана для безмассового скалярного поля с конформной связью в статическом гиперболическом пространстве-

$$D^+(x, x') = \frac{\Delta\chi}{4\pi^2 c \operatorname{sh}(\Delta\chi) [(\Delta\chi)^2 - (\Delta\eta - i\varepsilon)^2]} \quad (K = -1); \quad (5.33)$$

для массивного поля при произвольном ξ можно получить

$$G^+(x, x') = - \frac{i\mu}{8\pi c \operatorname{sh}(\Delta\chi)} \frac{\Delta\chi H_1^{(2)} \{ \mu [(\Delta\eta - i\varepsilon)^2 - (\Delta\chi)^2]^{1/2} \}}{[(\Delta\eta - i\varepsilon)^2 - (\Delta\chi)^2]^{1/2}} \quad (K = -1). \quad (5.34)$$

Здесь опять сходство с вайтмановской функцией в пространстве Минковского гарантирует, что детектор, находящийся в состоянии покоя в системе (χ, η) , не будет регистрировать частиц.

Если пространство-время не статическое, решения уравнения (5.4) построить трудно; это удастся выполнить только в специальных случаях или с помощью приближенных методов. Однако для безмассового поля с конформной связью можно сразу записать решения, воспользовавшись конформной инвариантностью уравнений поля; они будут иметь вид (5.28), где s следует заменить на $C(\eta)$. Это аналогично пространственно-плоскому случаю, рассмотренному в разд. 3.7, а получаемые таким путем решения, как и в разд. 3.7, являются положительно-частотными по отношению к конформному вектору Киллинга ∂_η . С помощью построенных таким путем мод можно без труда найти функции Грина в состоянии конформного вакуума. Например, для $K = \pm 1$, функция G^+ в состоянии конформного вакуума получается заменой s на $C^{1/2}(\eta)C^{1/2}(\eta')$ в (5.32) и (5.33).

5.3. Вселенная Милна

Случай пространства Робертсона — Уокера с $a(t) = t$ представляет особый интерес не только потому, что для него существуют точные решения уравнения конформно-нетривиального поля ($m \neq 0$), но и потому, что он проливает свет на природу соотношения между конформным и адиабатическим вакуумами [69, 70, 76, 136, 225].

Четырехмерное гиперболическое пространство-время с $a(t) = t$ (известное как вселенная Милна [359]) и его двумерный аналог в действительности являются лишь необычной координатной формой плоского пространства-времени, подобной системе Риндлера (разд. 4.5). Тем не менее, как и в случае системы Риндлера, модель Милна приводит к нетривиальным квантовым эффектам и проясняет особенности однородных расширяющихся космологических моделей с $K = 0$ и 1 (которые уже не являются просто замаскированными плоскими).

Элемент длины двумерного пространства Милна имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - a^2 t^2 dx^2 = e^{2a\eta} (d\eta^2 - dx^2), \quad (5.35)$$

где $|t| = a^{-1}e^{a\eta}$, a — постоянная. С помощью преобразования координат

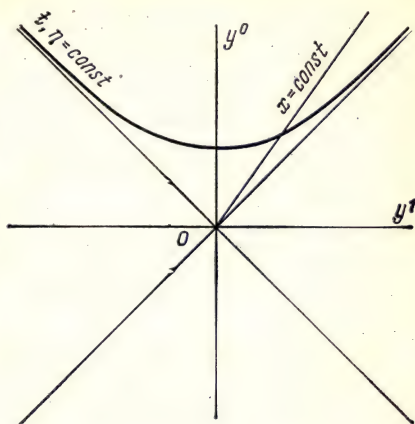
$$y^0 = a^{-1}e^{a\eta} \cosh ax, \quad y^{-1} = a^{-1}e^{a\eta} \sinh ax, \quad (5.36)$$

выражение (5.35) приводится к виду

$$ds^2 = (dy^0)^2 - (dy^1)^2, \quad 0 < y^0 < \infty, \quad -\infty < y^1 < \infty \quad (5.37)$$

(рис. 15).

Рис. 15. Вселенная Милна. Координаты t, x покрывают клин в пространстве Минковского, соответствующий области F на рис. 13. Эта область представляет собой наружную часть риндлеровского клина. Линии $x = \text{const}$, выходящие из начала координат, — мировые линии наблюдателей, которые видят изотропное расширение вселенной после большого взрыва в начале координат.



Волновое уравнение для массивного поля с $\xi = 0$ и $C = e^{2a\eta}$ имеет решения в функциях Бесселя и Ханкеля, из которых можно построить два полных набора ортонормированных мод $\{\bar{u}_k, \bar{u}_k^*\}$ и $\{u_k, u_k^*\}$ в форме (5.3) с функциями χ_k вида

$$\bar{\chi}_k = [(2a/\pi) \operatorname{sh}(\pi k/a)]^{-1/2} J_{-ik/a}(mt), \quad (5.38)$$

$$\chi_k = \frac{1}{2} (\pi/a)^{1/2} e^{\pi k/2a} H_{ik/a}^{(2)}(mt) \quad (k > 0). \quad (5.39)$$

Эти два полных набора связаны между собой преобразованием Боголюбова

$$\bar{\chi}_k = \alpha_k \chi_k + \beta_k \chi_k^*, \quad (5.40)$$

где

$$\alpha_k = [e^{\pi k/a}/2 \operatorname{sh}(\pi k/a)]^{1/2}, \quad \beta_k = [e^{-\pi k/a}/2 \operatorname{sh}(\pi k/a)]^{1/2}, \quad (5.41)$$

откуда видна аналогия со случаем Риндлера (ср. (5.41) с (4.96)).

Из соотношения (5.40) следует, что состояние $|\bar{0}\rangle$, определяемое с помощью (3.32) и (3.33) по отношению к модам \bar{u}_k , не эквивалентно состоянию $|0\rangle$, определяемому по отношению к модам u_k . Поэтому снова возникает вопрос: какому вакууму следует отдать предпочтение?

Вопрос несколько проясняется с помощью перехода к безмассовому пределу в (5.38):

$$\bar{\chi}_k \xrightarrow{m \rightarrow 0} e^{i\theta} e^{-ik\eta}/(2k)^{1/2}, \quad (5.42)$$

где θ — некоторая не зависящая от η фаза. Ясно, что в безмассовом случае $\bar{\chi}_{k\eta}$ является положительно-частотной функцией по отношению к конформному времени η , поэтому $|\bar{0}\rangle$ может быть

отождествлено в этом пределе с состоянием конформного вакуума (разд. 3.7).

Воспользовавшись интегральным представлением для функции Ханкеля в (5.39), можно записать [225]

$$u_k(x) = (8\pi^2 a)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho e^{-i\omega(\rho)y^0} e^{ip(\rho)y^1} e^{-ik\rho/a}, \quad (5.43)$$

где y^0 и y^1 определяются формулами (5.36) и введены величины

$$p(\rho) = -m \operatorname{sh} \rho, \quad \omega(\rho) = (p^2 + m^2)^{1/2}. \quad (5.44)$$

Очевидно u_k есть суперпозиция положительно-частотных мод по отношению ко времени y^0 в пространстве Минковского [161, 437]. Поэтому, если пространство (5.35) погрузить в двумерное пространство Минковского, вакуум $|0\rangle$, определенный по отношению к модам u_k , будет совпадать с обычным вакуумом Минковского. Далее, поскольку сопутствующий наблюдатель имеет собственное время t , он не будет обнаруживать частиц в этом состоянии.

Другое важное свойство мод u_k выясняется при сравнении их с положительно-частотными адиабатическими модами, основанными на соотношении (3.102) (которое в случае конформной связи остается справедливым и для двух измерений). В нулевом порядке

$$W_k^{(0)} = \omega_k = (k^2 + m^2 e^{2a\eta})^{1/2},$$

что после подстановки в (3.105) дает величину

$$T^2 \omega_k^2(\eta_1) = T^2 k^2 + T^2 m^2 e^{2a\eta_1 T}.$$

Ясно, что частота ω_k становится большой по сравнению с производными от $\dot{C}/C = O(T^{-1})$ (при фиксированном $\eta_1 = \eta/T$), если k , m , η возрастают по отдельности или вместе.

В пределе больших η

$$W_k \rightarrow \omega_k \simeq m e^{a\eta},$$

что при подстановке в (3.102) дает

$$\chi_k^{(A)} \rightarrow (2m e^{a\eta})^{1/2} \exp(-ime^{a\eta}/a), \quad \eta \rightarrow \infty \quad (5.45)$$

(индекс A указывает, что это соотношение справедливо с точностью до любого адиабатического порядка; все поправки высших порядков исчезают при $\eta \rightarrow \infty$). С другой стороны, воспользовавшись асимптотическим разложением функций Ханкеля, легко показать, что (с точностью до постоянного фазового множителя) в пределе больших η (больших $|t|$) выражение (5.39)

сводится к (5.45). Можно также проверить, что в пределе больших k или больших k и t (5.39) совпадает с соответствующим пределом (3.102).

Таким образом, моды u_k оказываются положительно-частотными по отношению к определению, данному в разд. 3.5 на основе принципа адиабатичности, а вакуум $|0\rangle$ является адиабатическим вакуумом бесконечного порядка. Поэтому в данном случае адиабатическое определение положительно-частотных решений естественным образом согласуется с определением в пространстве Минковского. Более того, инерциальный детектор частиц не только не будет обнаруживать квантов с точностью до любого конечного адиабатического порядка, но и вообще не будет регистрировать в этом вакуумном состоянии никаких частиц.

Поскольку инерциальный детектор не обнаруживает частиц в состоянии $|0\rangle$, из соотношения (5.40) ясно, что он должен регистрировать частицы в состоянии $|\bar{0}\rangle$. Применительно к безмассовому случаю это означает, что сопутствующий детектор регистрирует частицы в конформном милновском вакууме, чего и следовало ожидать почти для любого конформного вакуума (разд. 3.7).

Наличие частиц в состоянии конформного вакуума можно выявить и другим способом — путем вычисления среднего значения тензора энергии-импульса в этом состоянии $\langle \bar{0} | T_{\mu\nu} | \bar{0} \rangle$. Чтобы выполнить это строго [136], необходимо использовать методы регуляризации и перенормировок, излагаемые в следующей главе и применяемые к этой задаче в разд. 7.1. Однако и без использования этих методов можно вычислить конечную разность средних значений $T_{\mu\nu}$ в состояниях $|0\rangle$ и $|\bar{0}\rangle$. В безмассовом пределе получаем [69, 76]

$$\begin{aligned} \langle \bar{0} | T_{tt} | \bar{0} \rangle - \langle 0 | T_{tt} | 0 \rangle &= - (1/\pi a^2 t^2) \int_0^\infty k |\beta_k|^2 dk = \\ &= - (1/\pi) \int_0^\infty q (e^{2\pi q t} - 1)^{-1} dq = - 1/24\pi t^2, \end{aligned} \quad (5.46)$$

где использованы коэффициенты (5.41).

Далее можно воспользоваться тем, что вакуум $|0\rangle$ эквивалентен обычному вакууму Минковского, поэтому перенормированное (нормально упорядоченное) среднее $\langle 0 | T_{tt} | 0 \rangle$ должно быть равно нулю, и, следовательно, выражение (5.46) дает перенормированное среднее значение $\langle \bar{0} | T_{tt} | \bar{0} \rangle$. (Этому утверждению удастся придать более строгий смысл в гл. 6.) Таким образом, конформный вакуум обладает отрицательной плотностью

энергии излучения с планковским спектром при температуре $(2\pi t)^{-1}$. Соотношение между этими двумя вакуумными состояниями, следовательно, вполне аналогично соотношению между вакуумами Минковского и Риндлера вплоть до термодинамических ассоциаций.

Этот явный пример хорошо иллюстрирует физическое различие между состояниями адиабатического и конформного вакуумов. Различие становится менее удивительным, если вспомнить, что первый строится на основе анализа поведения поля в пределе больших масс, в то время как второй связан с конформной симметрией в безмассовом пределе.

В случае четырехмерного ($K = -1$) пространства Милна ситуация аналогична. Выражения (5.38) и (5.39) по-прежнему дают решения уравнения поля для конформной связи ($\xi = 1/6$). Состояния $|0\rangle$ и $|\bar{0}\rangle$ также являются адиабатическим и конформным (в безмассовом пределе) вакуумными состояниями соответственно. В действительности подобные результаты имеют место и для моделей с $K = 0$ и 1 при $a(t) = t$, несмотря на то что для выяснения смысла состояния $|0\rangle$ уже нельзя обращаться к связи с пространством Минковского.

Модель с $K = 0$ иллюстрирует любопытное явление, касающееся безмассового предела в состоянии адиабатического вакуума. В этом случае уравнение (5.4) сводится к

$$\frac{d^2 \chi_k}{d\eta^2} + [k^2 + (6\xi - 1)a^2] \chi_k = 0. \quad (5.47)$$

Пропорциональный кривизне член $(6\xi - 1)a^2$ входит в это уравнение так же, как и массовый член. Однако при $\xi < 1/6$ он становится отрицательным (соответствует массе тахиона), что обычно интерпретируется как неустойчивость вакуумного состояния. Если к лагранжиану поля добавить член, описывающий взаимодействие, такой, как $\lambda \phi^4$, возникает спонтанное нарушение симметрии [246]. Эта особенность возникает также в других космологических моделях (разд. 5.4); она отмечалась в работах Фролова, Гриба и Мостепаненко [217, 218].

Тот факт, что состояния частиц при $\xi < 1/6$ становятся плохо определенными, можно также установить из рассмотрения массивных адиабатических мод в случае $K = 0$:

$$\chi_k = \frac{1}{2} (\pi/a)^{1/2} e^{-i\pi\nu/2} H_{\nu}^{(2)}(mt), \quad (5.48)$$

$$\nu = [1 - 6\xi - (k/a)^2]^{1/2}.$$

Решение (5.48), сводящееся к (5.45) при больших $|t|$, можно использовать для построения адиабатического вакуума обычным

способом. Но в пределе малых масс χ_k сводится к выражению

$$\frac{1}{2} i (\pi/a)^{1/2} \sin^{-1}(\pi v) \left(\frac{e^{-i\pi v/2} \left(\frac{1}{2} m a^{-1}\right)^{-v} e^{-v\eta}}{\Gamma(1-v)} - \frac{e^{i\pi v/2} \left(\frac{1}{2} m a^{-1}\right)^v e^{v\eta}}{\Gamma(1+v)} \right)$$

которое расходится при $m \rightarrow 0$, если $\xi < 1/6$, $k^2/a^2 < 1 - 6\xi$.

Рождение частиц в этой модели было подробно рассмотрено Читром и Хартлем [111] с помощью методов, основанных на аналитическом продолжении (разд. 8.5).

5.4. Пространство де Ситтера

Пространство де Ситтера [149, 150] всегда привлекало к себе особое внимание специалистов в области квантовой теории поля (см. библиографию и приводимые ниже ссылки на литературу). Причина состоит в том, что пространство де Ситтера является единственным искривленным пространством с максимальной симметрией (см., например, [494]). Оно обладает той же степенью симметрии, что и пространство Минковского (десять векторов Киллинга), что весьма сильно облегчает расчеты в квантовой теории поля. Наличие кривизны и нетривиальных глобальных свойств обуславливает при этом ряд новых особенностей при квантовании полей в пространстве де Ситтера. В этом разделе мы ограничимся скалярными полями, хотя поля высших спинов также рассмотрены во многих цитируемых работах, в частности поля произвольного спина в пространстве де Ситтера обсуждались в работах [38, 149, 171, 172], см. также разд. 6.4.

Четырехмерное пространство де Ситтера проще всего представить как гиперболоид

$$z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 = -\alpha^2 \quad (5.49)$$

в пятимерном пространстве Минковского с метрикой

$$ds^2 = dz_0^2 - dz_1^2 - dz_2^2 - dz_3^2 - dz_4^2 \quad (5.50)$$

(см., например, [287, 422], и особенно [220], где обсуждается связь между геометрией пространства де Ситтера и квантовой теорией поля).

Из формулы уравнения (5.49) ясно, что группой симметрии пространства де Ситтера является десятипараметрическая группа $SO(1, 4)$ однородных «преобразований Лоренца» в пятимерном пространстве (см., например, [259]), известная как группа де Ситтера. Точно так же, как группа Пуанкаре играет центральную роль при квантовании полей в пространстве Минковского, группа де Ситтера важна при квантовании в пространстве де Ситтера.

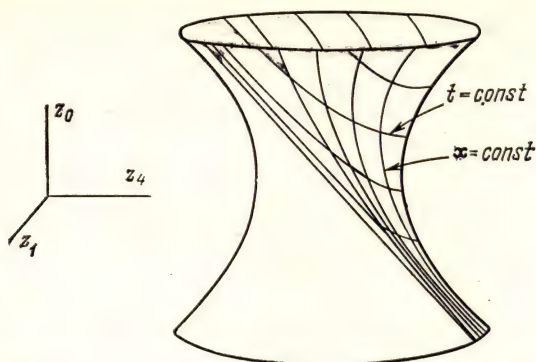


Рис. 16. Пространство де Ситтера, представленное как гиперboloид, погруженный в пятимерное плоское пространство-время (два измерения опущены). Изображенные координаты покрывают только полупространство, называемое стационарной вселенной, причем границами служат изотропные лучи $z_0 + z_4 = 0$ ($t = -\infty$). Трехмерное пространство при $t = \text{const}$ плоское, расширяющееся с ростом t .

Первый этап квантования скалярного поля, как обычно, состоит в построении решений волнового уравнения (3.26). Для получения решений необходимо ввести специальную систему координат. Из обсуждения пространств Риндлера и Милна ясно, что выбор специальной системы координат может привести к естественному выбору «вакуумного» состояния (возможно не единственному). Например, риндлеровский вакуум, определяемый положительно-частотными модами (4.81), является наиболее естественным для системы координат (4.71), в то время как для координат (4.66) естественным будет вакуум Минковского. Таким образом, мы приходим к необходимости изучить последовательно три широко используемые системы координат на деситтеровском гиперboloиде и обсудить свойства соответствующих решений волнового уравнения.

Рассмотрим сначала систему координат (t, \mathbf{x}) , определенную соотношениями

$$\begin{aligned} z_0 &= \alpha \operatorname{sh}(t/\alpha) + \frac{1}{2} \alpha^{-1} e^{t/\alpha} |\mathbf{x}|^2, \\ z_4 &= \alpha \operatorname{ch}(t/\alpha) - \frac{1}{2} \alpha^{-1} e^{t/\alpha} |\mathbf{x}|^2, \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$z_i = e^{t/\alpha} x_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad -\infty < t, \quad x_i < \infty,$$

которая покрывает половину многообразия де Ситтера при $z_0 + z_4 > 0$ (рис. 16). В этих координатах элемент длины (5.50) принимает вид

$$ds^2 = dt^2 - e^{2t/\alpha} \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2, \quad (5.52)$$

что представляет собой элемент длины в стационарной вселенной Бонди — Голда [58] и Хойла [298]. Выраженный через конформное время

$$\eta = -ae^{-t/a}, \quad -\infty < \eta < 0, \quad (5.53)$$

элемент длины (5.52) принимает вид

$$ds^2 = (a^2/\eta^2) \left[d\eta^2 - \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2 \right], \quad (5.54)$$

откуда следует, что эта часть пространства де Ситтера конформна части пространства Минковского. Остающаяся половина пространства де Ситтера может быть параметризована с помощью соотношений (5.51) с заменой знака в правых частях либо охвачена путем расширения области изменения конформного времени η до всей вещественной оси $-\infty < \eta < \infty$.

Поскольку выражение (5.54) имеет форму элемента длины пространственно-плоской модели Робертсона — Уокера (5.1) при $C(\eta) = (\alpha/\eta)^2$, можно использовать формализм разд. 5.1. Скалярная кривизна, рассчитанная с помощью соотношения (5.14), равна

$$R = 12\alpha^{-2}, \quad (5.55)$$

что при подстановке в (5.4) приводит к уравнению для зависящей от η функции χ_k в выражении для полевых мод. Решение этого уравнения выражается через функции Бесселя и Ханкеля. Определенные линейные комбинации, используемые в качестве «положительно-частотных» решений, определяют выбор вакуума. Поскольку

$$\frac{d^l}{d\eta^l} \left(\frac{\dot{C}}{C} \right)_{\eta \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0, \quad (5.56)$$

можно ожидать, что адиабатический вакуум будет соответствовать физическому состоянию без частиц при $\eta \rightarrow \pm\infty$ (разд. 3.5). Выберем точные решения равными (в хорошем приближении) адиабатическим модам (3.102) при условии, что величина

$$T^2 \omega_k^2(\eta_1) = T^2 k^2 + m^2 \alpha^2 / \eta_1^2 + 12 \left(\xi - \frac{1}{6} \right) / \eta_1^2 \quad (5.57)$$

велика по сравнению с $\dot{C}/C = O(T^{-1})$ для фиксированного $\eta_1 = \eta/T$. В этом случае

$$\chi_k^{(A)} \xrightarrow[k, \eta \rightarrow \infty]{} (1/2k)^{1/2} e^{-i k \eta} \quad (5.58)$$

при больших k или η . Легко проверить, что правильно нормиро-

ванные точные решения, обладающие этим свойством, имеют вид

$$\chi_k(\eta) = \frac{1}{2} (\pi\eta)^{1/2} H_v^{(2)}(k\eta), \quad (5.59)$$

где H — функция Ханкеля и

$$v^2 = \frac{9}{4} - 12(m^2 R^{-1} + \xi). \quad (5.60)$$

Заметим, что выражение (5.59) сводится к (5.58) в безмассовом пределе в случае конформной связи ($\xi = 1/6$). Следовательно, в противоположность модели Милна здесь конформный вакуум совпадает с адиабатическим вакуумом в безмассовом пределе.

Поскольку выражение (5.59) имеет асимптотический вид адиабатических мод (5.58) как при $\eta \rightarrow +\infty$, так и при $\eta \rightarrow -\infty$, рождение частиц не имеет места, даже если масштабный фактор проходит через координатную особенность при $\eta = 0$. Этого и следовало ожидать для вакуумного состояния, инвариантного относительно группы де Ситтера. Однако, так же как инвариантность относительно группы Пуанкаре вакуума в пространстве Минковского не гарантирует его единственности, инвариантность относительно группы де Ситтера не определяет единственным образом состояние вакуума в пространстве де Ситтера [110]. Поэтому для выбора положительно-частотных решений необходимо было привлекать соображения, основанные на анализе адиабатичности, чтобы выделить это вакуумное состояние из различных состояний, инвариантных относительно группы де Ситтера.

Чтобы проверить, насколько выбранный вакуум соответствует представлению о состоянии, не содержащем частиц с точки зрения сопутствующего наблюдателя, необходимо найти положительно-частотную вайтмановскую функцию G^+ для этого вакуумного состояния. Это сделано с помощью суммирования по модам с использованием (5.59) в ряде работ (см., например, [69, 79, 124, 419]), где было получено

$$G^+(x, x') = (16\pi\alpha^2)^{-1} \left(\frac{1}{4} - v^2 \right) \sec \pi v \times \\ \times F\left(\frac{3}{2} + v, \frac{3}{2} - v; 2; 1 + \frac{(\Delta\eta - i\varepsilon)^2 - (\Delta x)^2}{4\eta\eta'}\right); \quad (5.61)$$

здесь F — гипергеометрическая функция. В пределе безмассового поля с конформной связью выражение (5.61) сводится к

$$D^+(x, x') = \frac{-\eta\eta'}{4\pi^2\alpha^2 [(\Delta\eta - i\varepsilon)^2 - |\Delta x|^2]}, \quad (5.62)$$

откуда видна конформная связь с функцией Вайтмана (3.59) в пространстве Минковского (разд. 3.7).

Подставляя (5.62) в (3.55) и полагая $\Delta x = 0$, можно вычислить функцию отклика сопутствующего детектора с собственным временем t в состоянии конформного (совпадающего с адиабатическим) вакуума. Ограничиваясь «стационарной» частью пространства де Ситтера, определяемой условием (5.53), находим

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(E) &= \frac{1}{16\pi^2\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\left(\frac{t+t'}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta t \frac{e^{-iE\Delta t}}{\sin^2[(i\Delta t/2\alpha) + \varepsilon]} = \\ &= \frac{1}{16\pi^4\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\left(\frac{t+t'}{2}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta t \frac{e^{-iE\Delta t}}{[(i\Delta t/2\alpha\pi) + \varepsilon - n]^2}.\end{aligned}$$

Вычислив интеграл по Δt путем замыкания контура интегрирования в нижней полуплоскости комплексной переменной Δt ($E > 0$), находим

$$\mathcal{F}(E)/(\text{ед. времени}) = (E/2\pi) (e^{2\alpha\pi E} - 1)^{-1}, \quad (5.63)$$

что соответствует тепловому спектру при температуре $T = 1/(2\pi\alpha k_B)$. Таким образом, хотя частицы не рождаются, сопутствующий наблюдатель, движущийся в этой области пространства де Ситтера, воспринимает тепловое излучение. Это другой пример общего явления, обсуждавшегося в разд. 3.7, когда сопутствующий детектор имеет ненулевой отклик в состоянии конформного вакуума.

Полученный результат не противоречит тому, что конформный вакуум также является адиабатическим вакуумом произвольного порядка, поскольку в разд. 3.6 показано, что вероятность детектирования частицы с энергией E сопутствующим детектором в таком вакууме должна стремиться к нулю быстрее любой обратной степени E при больших E (см. стр. 86). Выражение (5.63) удовлетворяет этому требованию. Подобным же образом оно стремится к нулю быстрее любой обратной степени адиабатического параметра α , являющегося мерой кривизны пространства ($R = 12/\alpha^2$).

Другая часто используемая система координат (t, χ, θ, ϕ) вводится соотношениями

$$\begin{aligned}z_0 &= \alpha \operatorname{sh}(t/\alpha), \\ z_1 &= \alpha \operatorname{ch}(t/\alpha) \cos \chi, \\ z_2 &= \alpha \operatorname{ch}(t/\alpha) \sin \chi \cos \theta, \\ z_3 &= \alpha \operatorname{ch}(t/\alpha) \sin \chi \sin \theta \cos \phi, \\ z_4 &= \alpha \operatorname{ch}(t/\alpha) \sin \chi \sin \theta \sin \phi,\end{aligned} \quad (5.64)$$

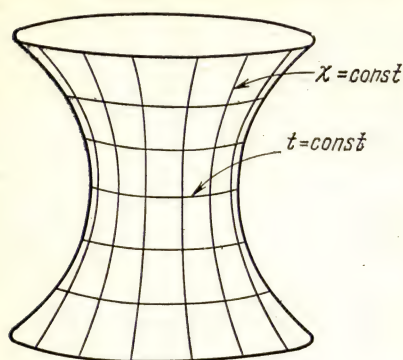


Рис. 17. Пространство де Ситтера, представленное как сжимающееся и расширяющееся компактное пространство с метрикой (5.65).

а соответствующий элемент длины (5.50) принимает вид

$$ds^2 = dt^2 - \alpha^2 \operatorname{ch}^2(t/\alpha) [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (5.65)$$

Если $-\infty < t < \infty$, $0 \leq \chi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, то эти координаты покрывают все многообразие де Ситтера. Метрика (5.65) отвечает (замкнутому) пространству Робертсона — Уокера с $K = +1$ (рис. 17).

Вводя конформное время

$$\eta = 2 \arctg e^{t/\alpha}, \quad 0 \leq \eta < \pi, \quad (5.66)$$

можно привести элемент длины (5.65) к виду, явно конформному пространству Эйнштейна:

$$ds^2 = \alpha^2 \sin^{-2} \eta [d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (5.67)$$

Воспользовавшись этим представлением, уравнение (5.4) приведем к форме

$$\frac{d^2 \gamma_k}{d\eta^2} + \left\{ k^2 + \operatorname{cosec}^2 \eta \left[m^2 \alpha^2 + 12 \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \right] \right\} \chi_k = 0, \quad (5.68)$$

допускающей явные решения в функциях Лежандра [124, 448]

$$\chi_k = \sin^{1/2} \eta [AP_{k-1/2}^v(-\cos \eta) + BQ_{k-1/2}^v(-\cos \eta)], \quad (5.69)$$

где в соответствии с (5.22) $k = 1, 2, 3, \dots$, а v определяется формулой (5.60). Выбор постоянных A, B фиксирует состояние вакуума. К сожалению, поскольку $\dot{C}/C = -2 \operatorname{ctg} \eta \rightarrow \pm \infty$ при $t \rightarrow \pm \infty$, пространство-время нельзя рассматривать как медленно расширяющееся в этих предельных случаях, и ввести физически оправданные состояния in- и out-вакуума невозможно.

Эта трудность проявляется наиболее отчетливо, если для решения уравнения (5.68) используется преобразование Лиувилля [341] (см. также [223]). Это преобразование в данном случае соответствует замене переменной η на t и введению функции

$$\chi_1(t) = \sin^{-1/2}(\eta) \chi(\eta),$$

в результате чего уравнение (5.68) принимает вид

$$\frac{d^2 \chi_1}{dt^2} + \alpha^{-2} \left[\sin^2 \eta \left(k^2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} \cos^2 \eta + m^2 \alpha^2 + 12 \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \right] \chi_1 = 0. \quad (5.70)$$

В отдаленном прошлом и будущем ($t \rightarrow \pm \infty$) это уравнение сводится к

$$\frac{d^2 \chi_1}{dt^2} - (v/\alpha)^2 \chi_1 = 0$$

и имеет решение

$$\chi_1 \sim e^{-v t/\alpha}, \quad (5.71)$$

которое является положительно-частотным по отношению к t (при $v^2 < 0$, $\text{Im } v > 0$). Некоторые авторы (например, [124, 260, 408, 409], см. также [171]) определяют вакуумные состояния, вводя в качестве положительно-частотных решений уравнений (5.68) и (5.70) решения, имеющие асимптотику (5.71) при больших $|t|$. При таком определении in- и out-вакуумы оказываются неэквивалентными, а связывающее их преобразование Боголюбова — не зависящим от частоты, что приводит к бесконечному числу рождающихся частиц. (Замечание об ошибочности такого определения вакуума, по-видимому, впервые было высказано Фуллингем [220]; см. также [416]). Этот патологический результат объясняется тем, что области $t \rightarrow \pm \infty$ и, следовательно, определенные выше вакуумные состояния не являются адиабатическими. Однако из разд. 3.5 следует, что если потребовать достаточно быстрого убывания коэффициента Боголюбова β_k при больших k , чтобы гарантировать конечность полной плотности частиц, то необходимо использовать адиабатический вакуум не ниже второго порядка.

Хотя адиабатических in- и out-областей не существует, но можно определить адиабатические состояния вакуума, как те состояния, которые не содержат частиц с большими импульсами. Напомним, что адиабатические решения (3.102) становятся хорошим приближением для *точных* адиабатических положительно-частотных мод, когда величина

$$T^2 \omega_k^2(\eta_1) = T^2 k^2 + T^2 \text{cosec}^2(\eta_1 T) \left[m^2 \alpha^2 + 12 \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \right] \quad (5.72)$$

делается большой по сравнению с производными от \dot{C}/C при фиксированном $\eta_1 = \eta/T$. Очевидно, это выполняется для больших k , m или α (при фиксированном η), но не имеет места для больших $|t|$, т. е. $\eta \rightarrow 0$ или π при $T \rightarrow 0$, π/η_1 . Например, при $\eta \rightarrow \pi$, $T \rightarrow \pi/\eta_1$ выражение (5.72) становится бесконечным, возрастая с той же скоростью, что и $d^l(\dot{C}/C)/d^l \eta$ при $l = 1$ и более медленно для $l > 1$.

В пределе больших k выражение (3.102) в нулевом порядке дает

$$\chi_k^{(0)}(\eta) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} e^{-ik\eta/(2|k|)^{1/2}}. \quad (5.73)$$

Выбирая постоянные A, B так, чтобы правильно нормированное решение (5.69) сводилось к (5.73) при больших k , находим [110, 448]

$$\chi_k(\eta) = \sin^{1/2} \eta \left[\pi \Gamma \left(k + \frac{1}{2} - \nu \right) / 4 \Gamma \left(k + \frac{1}{2} + \nu \right) \right]^{1/2} \times \\ \times e^{i\nu\pi/2} [P_{k-1/2}^\nu(-\cos \eta) - (2i/\pi) Q_{k-1/2}^\nu(-\cos \eta)]. \quad (5.74)$$

Поскольку решение (5.74) в пределе больших k сводится к (5.73) независимо от величины η , оно задает адиабатический вакуум при всех значениях времени. Таким образом, как и в случае координат (5.51) в пространстве де Ситтера, рождение частиц отсутствует, выражение (5.74) соответствует устойчивому адиабатическому состоянию вакуума. Далее, в случае безмассового поля с конформной связью решения (5.74) сводятся к правой части (5.73), поэтому опять конформный вакуум совпадает с адиабатическим вакуумом в безмассовом пределе.

Теперь можно воспользоваться выражением (5.74) для вычисления положительно-частотной вайтмановской функции для адиабатического вакуума [448]. Она оказывается в точности такой же функцией координат z_μ пространства, в которое погружено пространство де Ситтера, что и (5.61). Таким образом, вакуум, определенный в координатах (5.54), совпадает с вакуумом, определенным в координатах (5.67). Более того, оказывается, что детектор, находящийся в покое в этой системе координат, воспринимает такое вакуумное состояние как термостат, заполненный тепловым излучением при температуре $T = 1/(2\pi\alpha k_B)$, точно как и в стационарном случае (см. (5.63)). Этот результат впервые был получен Гиббонсом и Хокингом [236], использовавшим его в качестве аргумента, свидетельствующего о том, что определение понятия частицы в квантовой гравитации зависит от наблюдателя.

Последняя система координат, которую мы рассмотрим здесь, — статические координаты, определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} z_0 &= (\alpha^2 - r^2)^{1/2} \operatorname{sh}(t/\alpha), \\ z_1 &= (\alpha^2 - r^2)^{1/2} \operatorname{ch}(t/\alpha), \\ z_2 &= r \sin \theta \cos \phi, \\ z_3 &= r \sin \theta \sin \phi, \\ z_4 &= r \cos \theta, \quad 0 \leq r < \infty, \end{aligned} \quad (5.75)$$

и покрывающие лишь половину многообразия де Ситтера с $z_0 + z_1 > 0$ (рис. 18). В этих координатах элемент длины (5.50) принимает вид

$$ds^2 = [1 - (r^2/\alpha^2)] dt^2 - [1 - (r^2/\alpha^2)]^{-1} dr^2 - \\ - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (5.76)$$

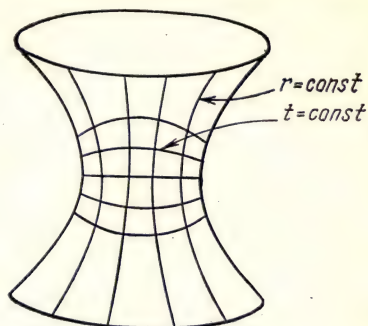


Рис. 18. Пространство де Ситтера как статическое пространство с метрикой (5.76).

Метрика (5.76) обладает координатной особенностью при $r = \alpha$, где находится горизонт событий для наблюдателя, мировая линия которого следует траектории вектора Киллинга ∂_t при $r = 0$. Выражение (5.76) напоминает элемент длины в пространстве Шварцшильда (3.18), и квантование поля можно проводить аналогичным образом [236, 337, 342, 343] (см. также [265]).

Соответствующая формулировка квантовой теории поля в пространстве де Ситтера, выбор полевых мод и вакуумного состояния, ассоциируемых с системой координат (5.75), имеют уже иной физический статус, нежели обсуждавшиеся выше, поскольку вакуумное состояние оказывается неинвариантным относительно группы де Ситтера (см. [110]). Действительно, как мы увидим в разд. 6.3, среднее значение тензора энергии-импульса в этом квантовом состоянии обращается в бесконечность на горизонте событий $r = \alpha$. Поскольку положение горизонта зависит от выбора начала радиальной координаты, каждая точка в пространстве де Ситтера (т. е. каждый наблюдатель) ассоциируется с различным выбором вакуумного состояния. Следовательно, такая схема квантования приводит к вакууму, который не инвариантен даже относительно трансляций и воспринимается сопутствующим наблюдателем как резервуар с тепловым излучением. (Свойства статической системы координат обсуждались Шредингером [442], § 1.4.)

5.5. Классификация состояний конформного вакуума

Прежде чем переходить к более общему типу пространств, объединим полученные в предыдущих разделах результаты в рамках классификации, предложенной Канделасом и Даукером [91]. Этот подход также оказывается полезным при обсуждении свойств тензора энергии-импульса в различных пространствах.

Идея классификации конформных вакуумных состояний, ассоциируемых с различными пространствами, формулируется следующим образом. Пусть M — некоторое искривленное про-

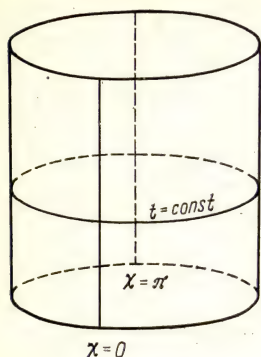


Рис. 19. Изображение вселенной Эйнштейна в виде цилиндра. Координаты θ и ϕ опущены, t изменяется в вертикальном направлении от $-\infty$ до $+\infty$, χ отсчитывается вдоль окружности цилиндра.

ным; если же \tilde{M} — пространство Риндлера, то имеются два вакуумных состояния, одно из которых определяется по отношению к ∂_t , а второе — по отношению к ∂_η (см. (4.82)).

Свойства глобальных гиперповерхностей Коши в различных пространствах Робертсона — Уокера, с которыми мы встречались, проще всего обсуждать с помощью конформных диаграмм Пенроуза (см. [287], гл. 5), получаемых при конформном отображении этих пространств в статическую вселенную Эйнштейна (разд. 5.2) с элементом длины

$$ds^2 = dt^2 - d\chi^2 - \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (5.77)$$

Опуская координаты θ , ϕ , эйнштейновскую вселенную можно изобразить в виде цилиндра, как показано на рис. 19. Развертывание цилиндра дает область $-\infty < t < \infty$, $0 \leq \chi < \pi$, на плоскости t , χ . Конформные образы каждого из пространств в этой области и образуют диаграммы Пенроуза, к которым мы обратимся.

Различные типы пространств Робертсона — Уокера показаны на рис. 20.

Для случаев пространств Робертсона — Уокера с $K = 1, 0, -1$ (рис. 20, б, г и е соответственно) точная область изменения конформного времени η зависит от вида функции $C(\eta)$ в (5.11). Мы ограничимся значениями $\eta > 0$, но если опустить это ограничение и рассматривать пространства, продолжаемые через

пространство-время, конформно отображаемое на плоское пространство-время \tilde{M} (не обязательно совпадающее с неограниченным пространством Минковского), и пусть Σ — глобальная гиперповерхность Коши в M , отображаемая при конформном преобразовании в глобальную гиперповерхность Коши $\tilde{\Sigma}$ в \tilde{M} ; тогда для каждого глобального времениподобного вектора Киллинга в \tilde{M} существует глобальный времениподобный конформный вектор Киллинга в M . Таким образом, состояния конформного вакуума, определяемые по отношению к конформному вектору Киллинга, можно классифицировать, обращаясь к вакуумным состояниям, заданным на \tilde{M} . В частности, если \tilde{M} — пространство Минковского, то поскольку для него существует единственный глобальный времениподобный вектор Киллинга, вакуум, определенный по отношению к вектору Киллинга ∂_t , будет единственным

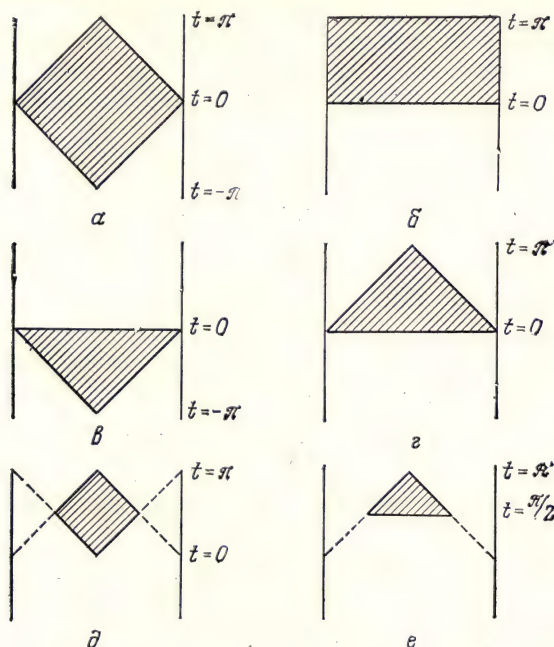


Рис. 20. Конформные образы различных пространств на эйнштейновском цилиндре. Координата t совпадает с временной координатой на цилиндре Эйнштейна (рис. 19). a — пространство Минковского, $б$ — пространство де Ситтера и пространство Робертсона — Уокера при $K = 1$, $в$ — стационарная вселенная, $г$ — пространство-время Робертсона — Уокера при $K = 0$, $д$ — клин Риндлера, статическое пространство де Ситтера, открытая вселенная Эйнштейна и вселенная Милна, $е$ — пространство-время Робертсона — Уокера при $K = -1$ [91].

сингулярность в точке $\eta = 0$, то верхнюю часть диаграммы можно получить путем отражения относительно линии $t = 0$. Так, например, если стационарная вселенная (5.54) продолжена на всю область $-\infty < \eta < \infty$, то верхняя половина рис. 20, $в$ получается отражением относительно линии $t = 0$.

Важной особенностью этих диаграмм является то, что все пространства, изображенные на рис. 20, a — $г$, имеют в качестве конформного образа глобальной гиперповерхности Коши поверхность $t = 0$, $0 \leq \chi < \pi$, а пространства, изображенные на рис. 20, $д$, $е$, — поверхность $t = \pi/2$, $0 \leq \chi < \pi/2$.

Поэтому изображенные на рис. 20 пространства можно разделить на два класса: 1) пространства на рис. 20, a — $г$, для которых имеется лишь один конформный вакуум, соответствующий конформному вектору Киллинга, связанному конформным преобразованием с времениподобным вектором Киллинга ∂_t ;

пространства Минковского (t — время Минковского), и 2) пространства на рис. 20, ∂, e , для которых имеются два конформных вакуума по отношению к конформным векторам Киллинга, связанным с времениподобными векторами Киллинга ∂_t и ∂_η пространства Риндлера.

Поскольку и пространство Минковского и пространство Риндлера являются плоскими, эта классификация конформных состояний вакуума имеет чисто топологический характер. Различные топологии можно охарактеризовать инвариантной величиной, называемой характеристикой Эйлера — Пуанкаре (см. [242]), использованной в работе [116] для классификации (евклидизированных) состояний вакуума Минковского и Риндлера. Она принимает значение 1 для пространства Минковского (топология R^4) и 0 для пространства Риндлера (топология $R^3 \times S^1$).

Что означает физически эта топологическая классификация? В разд. 4.5 показано, что вакуум Минковского содержит тепловой спектр частиц Риндлера при температуре $a/2\pi k_B$. Можно также убедиться в том, что функции Грина в вакууме Минковского совпадают с риндлеровскими тепловыми функциями Грина (разд. 2.7). Аналогичным образом можно связать между собой вакуумные состояния в других показанных на рис. 20 пространствах, имеющих одинаковую геометрию, но различную топологию. Например, статическое пространство де Ситтера (5.76) и пространство де Ситтера (5.65) имеют одинаковую кривизну, но статическое пространство де Ситтера относится к классу Риндлера (рис. 20, ∂), в то время как пространство де Ситтера — к классу Минковского (рис. 20, δ). Отсюда можно сделать вывод, что деситтеровский конформный вакуум является термализацией статического деситтеровского вакуума по отношению к конформному вектору Киллинга, связанному с ∂_η , при температуре $1/2\pi a k_B$. Аналогично конформный вакуум эйнштейновской вселенной представляет собой термализацию при мнимой температуре $T = 1/2\pi i k_B$ конформного вакуума, связанного с ∂_η , для открытой вселенной Эйнштейна (дальнейшее обсуждение см. в работе [91]).

Эти результаты суммированы на рис. 21, где вертикальные стрелки обозначают конформные преобразования, а горизонтальные — термализацию при указанной температуре. В дополнение к этому из обсуждения поведения детекторов частиц в стационарной вселенной (см. (5.63)) мы знаем, что конформный вакуум в стационарной вселенной может быть получен из вакуума Минковского термализацией при температуре $1/2\pi a k_B$. Это значит, что вертикальное конформное соотношение между вакуумами пространства Минковского и стационарной вселенной на диаграмме в этом случае является также соотношением

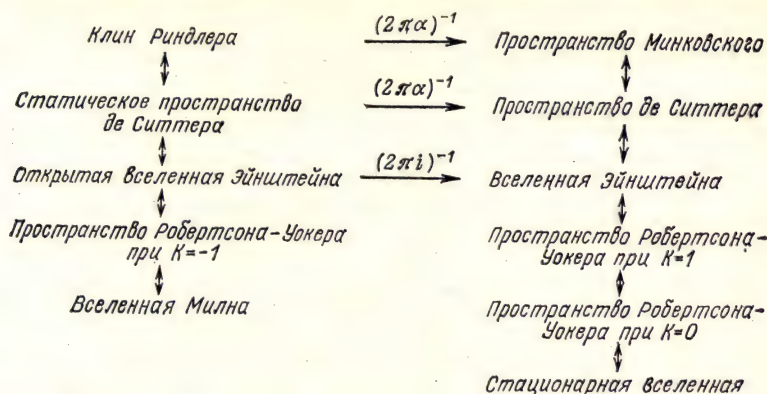


Рис. 21. Термодинамические и конформные соотношения между различными пространствами. Вертикальные стрелки означают, что пространства связаны конформными преобразованиями, горизонтальные стрелки соответствуют термализации при указанной температуре [91].

термализации. Можно проверить, что подобное соотношение имеет место для эйнштейновского и деситтеровского (с элементом длины (5.65)) конформных вакуумов.

5.6. Пространства типа Бианки I и теория возмущений

До сих пор все наши примеры ограничивались случаем изотропных пространств. Такие пространства особенно интересны, поскольку в настоящее время Вселенная, согласно наблюдениям, является изотропной с высокой точностью. Источник этой изотропии в течение долгого времени был загадкой для космологов (см., например, обзор [349]). Среди других предположений Зельдович (см. [408]) выдвинул гипотезу, что первоначально Вселенная была анизотропна, но быстро изотропизировалась из-за квантовых эффектов на начальной стадии расширения. Исследование этого предположения технически довольно сложно, так как требует учета обратного воздействия квантово-полевых эффектов, индуцируемых пространственно-временной кривизной, на динамику гравитационного поля. Мы еще вернемся к этому вопросу в конце гл. 7 после обсуждения расчета тензора энергии-импульса. Здесь мы ограничимся общим построением квантовой теории поля в анизотропном пространстве-времени.

Рассмотрим четырехмерное (пространственно-плоское) пространство типа Бианки I [35] с элементом длины

$$ds^2 = dt^2 - \sum_{i=1}^3 a_i^2(t) dx_i^2. \quad (5.78)$$

(Квантовая теория поля в замкнутой анизотропной вселенной типа Бианки IX построена в работах [299—301, 305]; см. также [33].)

Введем величину

$$[a(t)]^2 = C(t) \equiv (a_1 a_2 a_3)^{2/3} = (C_1 C_2 C_3)^{1/3}, \quad (5.79)$$

где $C_i \equiv a_i^2$. Новый временной параметр η удобно определить соотношением

$$\eta = \int a^{-1}(t') dt'; \quad (5.80)$$

в изотропном пределе $a_1 = a_2 = a_3 = a$ он сводится к обычному конформному времени (5.10). Если ввести также величины

$$d_i = \dot{C}_i / C_i, \quad (5.81)$$

где точка над буквой обозначает дифференцирование по η , и

$$D \equiv \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 d_i = \dot{C}/C, \quad (5.82)$$

$$Q \equiv \frac{1}{72} \sum_{i < j} (d_i - d_j)^2, \quad (5.83)$$

то отличные от нуля символы Кристоффеля для метрики (5.78) будут иметь вид

$$\Gamma_{\eta\eta}^\eta = \frac{1}{2} D, \quad \Gamma_{ii}^\eta = \frac{1}{2} d_i C_i / C, \quad \Gamma_{i\eta}^i = \Gamma_{\eta i}^i = \frac{1}{2} d_i. \quad (5.84)$$

Отсюда можно найти ненулевые компоненты тензора Риччи (см., например, [225]):

$$R_{\eta\eta} = \frac{3}{2} \dot{D} + 6Q, \quad R_{ii} = -\frac{1}{2} C^{-1} C_i (\dot{d}_i + d_i D), \quad (5.85)$$

и скалярную кривизну

$$R = C^{-1} \left[3\dot{D} + \frac{3}{2} D^2 + 6Q \right]. \quad (5.86)$$

Вводя далее величины

$$S = \frac{1}{144} \sum_{\substack{i < j \\ k \neq i, j}} (d_k - D) (d_i - d_j)^2, \\ U = \frac{1}{72} \sum_{i < j} (\dot{d}_i - \dot{d}_j)^2, \quad (5.87)$$

можно представить квадрат тензора Вейля в виде

$$C^{\alpha\beta\gamma\delta}C_{\alpha\beta\gamma\delta} = 4C^{-2}(3U - 4\dot{S} + 12Q^2). \quad (5.88)$$

Эта величина служит мерой анизотропии пространства-времени. Поскольку пространство не является конформно-плоским, мы не можем ввести состояния конформного вакуума для полей, обладающих конформно-инвариантными лагранжианами, как это делалось в пространствах Робертсона — Уокера. Однако адиабатические состояния вакуума построить можно [223, 225, 302].

Разложение по модам (3.30) с мерой, отвечающей плоским пространственным сечениям, имеет вид

$$\phi(x) = \int d^3k [a_k u_k(x) + a_k^\dagger u_k^*(x)]. \quad (5.89)$$

Поскольку модели типа Бианки I симметричны относительно пространственных трансляций, решения для мод можно построить методом разделения переменных (ср. (5.3)):

$$u_k(x) = (2\pi)^{-3/2} e^{ik \cdot x} C^{-1/2}(\eta) \chi_k(\eta). \quad (5.90)$$

Подставляя это разложение в (3.26), получаем уравнение для χ_k (ср. (5.4)):

$$\frac{d^2 \chi_k}{d\eta^2} + \left\{ C(\eta) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{k_i^2}{C_i(\eta)} + m^2 + \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R(\eta) \right) + Q(\eta) \right\} \chi_k = 0. \quad (5.91)$$

В соответствии с (3.28) условие нормировки принимает вид (ср. (5.6))

$$\chi_k \partial_\eta \chi_k^* - \chi_k^* \partial_\eta \chi_k = i. \quad (5.92)$$

Как и в разд. 3.5, положительно-частотное обобщенное решение типа ВКБ уравнения (5.91) имеет вид

$$\chi_k = (2W_k)^{-1/2} \exp \left[-i \int^\eta W_k(\eta') d\eta' \right], \quad (5.93)$$

где величина W_k может быть найдена с точностью до любого адиабатического порядка A (и обозначается $W_k^{(A)}, \chi_k^{(A)}$) с помощью итераций, опирающихся на нулевое приближение

$$W_k^0 = \omega_k = \left\{ C(\eta) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{k_i^2}{C_i} + m^2 \right) \right\}^{1/2}. \quad (5.94)$$

Далее можно ввести адиабатические состояния вакуума с помощью процедуры, применявшейся в моделях Робертсона — Уокера, т. е. путем сшивания точных положительно-частотных решений уравнения (5.91) с построенными приближенными решениями в некоторый момент времени.

К сожалению, найти точные решения уравнения (5.91) очень трудно. Но это удается сделать в одном простом случае, когда

$$a_1(t) = t, \quad a_2 = a_3 = 1, \quad 0 < t < \infty, \quad -\infty < x^i < \infty. \quad (5.95)$$

Такое пространство-время аналогично вселенной Милна (разд. 5.3), в чем можно убедиться с помощью преобразований

$$y^0 = t \operatorname{ch} x^1, \quad y^1 = t \operatorname{sh} x^1, \quad y^2 = x^2, \quad y^3 = x^3, \quad (5.96)$$

приводящих элемент длины (5.78) при выборе (5.95) к соответствующей величине в пространстве Минковского с ограничением

$$y^0 > |y^1|.$$

В этом простом случае решение уравнения (5.91) может быть выражено через функции Бесселя и Ханкеля [225, 369—372]. Можно показать, что решение, выражающееся через функцию Ханкеля $H^{(2)}$, является положительно-частотным в смысле адиабатического определения. Как и в случае вселенной Милна, оказывается, что оно также положительно-частотное в смысле обычного определения в накрывающем пространстве Минковского.

Ввиду затруднений при отыскании точных решений уравнения (5.91) естественно попытаться применить для его решения приближенные методы. Один из таких методов, использованный в первоначальных работах Зельдовича и Старобинского [503, 504] и далее развитый Биррелом и Дэвисом [43], состоит в решении уравнения (5.91) для малых анизотропных возмущений пространства-времени Робертсона—Уокера (см. также разд. 7.3).

Опишем коротко этот метод. Элемент длины (5.78) сначала приводится к виду

$$ds^2 = C(\eta) \left\{ d\eta^2 - \sum_{i=1}^3 [1 + h_i(\eta)] (dx^i)^2 \right\}; \quad (5.97)$$

далее предполагается, что

$$\max |h_i(\eta)| \ll 1, \quad (5.98)$$

и для упрощения последующих рассуждений принимается

$$\sum_{i=1}^3 h_i(\eta) = 0. \quad (5.99)$$

Теперь можно разложить уравнение (5.91) с точностью до линейных членов по h_i , что дает

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \chi_k}{d\eta^2} + \left[k^2 + m^2 C(\eta) + \left(\xi - \frac{1}{6} \right) C(\eta) R_I(\eta) - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^3 h_i(\eta) k_i^2 \right] \chi_k = 0; \quad (5.100) \end{aligned}$$

где R_I — скалярная кривизна изотропного пространства-времени при $h_i = 0$:

$$R_I = C^{-1} \left[3\dot{D} + \frac{3}{2} D^2 \right]. \quad (5.101)$$

Налагая дополнительные условия

- 1) $h_i(\eta) \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow \pm \infty$,
- 2) $C(\eta) R(\eta) \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow \pm \infty$, если $\xi \neq \frac{1}{6}$,
- 3) $C(\eta) \rightarrow C(\infty) = C(-\infty) < \infty$ при $\eta \rightarrow \pm \infty$, если $m \neq 0$, (5.102)

нетрудно показать, что нормированные положительно-частотные решения уравнения (5.100) при $\eta \rightarrow -\infty$ имеют вид

$$\chi_k^{\text{in}}(\eta) = (2\omega)^{-1/2} e^{-i\omega\eta}, \quad (5.103)$$

где

$$\omega^2 = k^2 + m^2 C(\infty). \quad (5.104)$$

Метод, позволяющий ослабить второе и третье условия с помощью преобразования Лиувилля, был предложен Бирреллом [37, 39].

При выполнении начальных условий (5.102) уравнение (5.100) можно представить в виде интегрального уравнения

$$\chi_k(\eta) = \chi_k^{\text{in}}(\eta) + \omega^{-1} \int_{-\infty}^{\eta} V_k(\eta') \sin[\omega(\eta - \eta')] \chi_k(\eta') d\eta', \quad (5.105)$$

где

$$V_k(\eta) = \sum_i h_i(\eta) k_i^2 + m^2 [C(\infty) - C(\eta)] - \left(\xi - \frac{1}{6} \right) C(\eta) R_I(\eta). \quad (5.106)$$

При больших значениях времени уравнение (5.105) имеет решение

$$\chi_k^{\text{out}}(\eta) = \alpha_k \chi_k^{\text{in}}(\eta) + \beta_k \chi_k^{\text{in}*}(\eta), \quad (5.107)$$

где коэффициенты Боголюбова равны

$$\alpha_k = 1 + i \int_{-\infty}^{\infty} \chi_k^{\text{in}*}(\eta) V_k(\eta) \chi_k(\eta) d\eta, \quad (5.108)$$

$$\beta_k = -i \int_{-\infty}^{\infty} \chi_k^{\text{in}}(\eta) V_k(\eta) \chi_k(\eta) d\eta. \quad (5.109)$$

Если рассматривать величину $V_k(\eta)$ как малую, можно построить итерационное решение уравнения (5.105). В низшем порядке по V_k имеем $\chi_k(\eta) = \chi_k^{\text{in}}(\eta)$, что после подстановки в (5.108) и (5.109) приводит к следующим выражениям для коэф-

фициентов Боголюбова в первом порядке по V_k :

$$\alpha_k = 1 + (i/2\omega) \int_{-\infty}^{\infty} V_k(\eta) d\eta, \quad (5.110)$$

$$\beta_k = -(i/2\omega) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\omega\eta} V_k(\eta) d\eta. \quad (5.111)$$

Такой метод также можно использовать в космологических моделях вблизи сингулярности при $\eta = 0$, если $V_k(\eta)$ обращается в нуль при $\eta \rightarrow 0$. Для этого достаточно заменить нижний предел интегрирования по η на нуль.

Эта процедура может рассматриваться как применение теории возмущений при нарушении конформной тривиальности вследствие анизотропии пространства-времени. Метод можно обобщить на случай нарушения конформной симметрии при наличии (малой) массы или (малой) неконформной связи. Тогда при $m = 0$, $\xi = 1/6$ условие малости V_k соответствует условию слабой анизотропии (5.98). Если же $m \neq 0$, $\xi \neq 1/6$, то малость V_k означает, что m мало и $\xi \simeq 1/6$. При $h_i \equiv 0$ эти условия означают малое нарушение конформной инвариантности в пространстве-времени Робертсона — Уокера с масштабным фактором $a(\eta) = C^{1/2}(\eta)$.

Если выбранное квантовое состояние совпадает с состоянием in-вакуума, то в out-области ($\eta \rightarrow \infty$) плотность числа частиц (в единице собственного объема) равна (ср. (3.42))

$$n = (2\pi a)^{-3} \int |\beta_k|^2 d^3k, \quad (5.112)$$

а плотность энергии —

$$\rho = (2\pi)^{-3} a^{-4} \int |\beta_k|^2 \omega d^3k. \quad (5.113)$$

Подставляя (5.111) и (5.106) в (5.112) и интегрируя по импульсам [43], во втором порядке (по V_k) для плотности частиц получаем

$$\begin{aligned} n = & (960\pi a^3)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} [C^2(\eta) C^{\alpha\beta\gamma\delta} C_{\alpha\beta\gamma\delta} + 60V^2(\eta)] d\eta + \\ & + \bar{m} (960a^3)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_2 \left\{ F(\bar{m}(\eta_1 - \eta_2)) \left[-60V(\eta_1)V(\eta_2) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(8\bar{m}^4 - 6\bar{m}^2 \partial_{\eta_1} \partial_{\eta_2} + \frac{3}{2} \partial_{\eta_1}^2 \partial_{\eta_2}^2 \right) \sum_i h_i(\eta_1) h_i(\eta_2) \right] - \right. \\ & \left. - J_1(2\bar{m}(\eta_1 - \eta_2)) \left[60V(\eta_1)V(\eta_2) + \frac{1}{2} \sum_i \ddot{h}_i(\eta_1) \ddot{h}_i(\eta_2) \right] \right\}. \quad (5.114) \end{aligned}$$

где

$$\bar{m}^2 \equiv C(\infty) m^2, \quad (5.115)$$

$$V(\eta) \equiv m^2 [C(\infty) - C(\eta)] - \left(\xi - \frac{1}{6}\right) C(\eta) R_I(\eta), \quad (5.116)$$

$$F(x) \equiv - (1/\pi) + x [J_0(2x) H_{-1}(2x) + H_0(2x) J_1(2x)] \quad (5.117)$$

(H — функции Струве, J — функции Бесселя). Мы также воспользовались тем, что с точностью до второго порядка по h_i выражение (5.88) сводится к $C^{\alpha\beta\gamma\delta} C_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} C^{-2} \sum_i (\dot{h}_i)^2$. В безмассовом пределе (5.114) принимает вид

$$n = (960\pi a^3)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} C^2(\eta) \left[C^{\alpha\beta\gamma\delta} C_{\alpha\beta\gamma\delta} + 60 \left(\xi - \frac{1}{6}\right)^2 R_I^2 \right] d\eta \quad (5.118)$$

и имеет чисто геометрический характер. При получении выражений (5.114) и (5.118) в дополнение к (5.102) было наложено условие

$$\dot{h}_i(\eta), \dot{h}_i(\eta) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \pm \infty. \quad (5.119)$$

Если далее потребовать, чтобы

$$\ddot{h}_i(\eta) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \pm \infty, \quad (5.120)$$

то аналогичным образом можно вычислить из (5.113) плотность энергии

$$\begin{aligned} \rho = (3840\pi^2 a^4)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_2 \operatorname{Re} K_0(2i\bar{m}(\eta_1 - \eta_2)) (\partial_{\eta_1} \partial_{\eta_2} - 4\bar{m}^2) \times \\ \times \left[120V(\eta_1) V(\eta_2) + (\partial_{\eta_1} \partial_{\eta_2} - 4\bar{m}^2)^2 \sum_i h_i(\eta_1) h_i(\eta_2) \right], \end{aligned} \quad (5.121)$$

где K_0 — модифицированная функция Бесселя.

В безмассовом пределе выражение (5.121) сводится к

$$\begin{aligned} \rho = - (3840\pi^2 a^4)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_2 \ln [2i\mu(\eta_1 - \eta_2)] \times \\ \times \left\{ 120\dot{V}(\eta_1) \dot{V}(\eta_2) + \sum_i \ddot{h}_i(\eta_1) \ddot{h}_i(\eta_2) \right\}. \end{aligned} \quad (5.122)$$

В этом выражении μ — произвольная малая масса, значение которой можно изменять, не меняя ρ , поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{V}(\eta) d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{h}_i(\eta) d\eta = 0.$$

К сожалению, явно выразить интегралы (5.114) или (5.121) через известные функции удастся лишь для некоторых значений h_i и V , но полученные выражения могут использоваться для численных расчетов. Метод численного (а иногда и аналитического) построения *точных* решений был предложен Бирреллом [37, 39]

Более широкий класс задач удастся решить в замкнутом виде, возвратившись к (5.111) и проводя интегрирование по η до вычисления n и ρ с помощью (5.112) и (5.113). В качестве примера рассмотрим пространство-время, обладающее элементом длины (5.97), при

$$h_i(\eta) = e^{-\alpha\eta^2} \cos(\beta\eta^2 + \delta_i), \quad (5.123)$$

где α, β, δ_i — постоянные; для выполнения условия (5.99) предполагается, что фазы δ_i отличаются друг от друга на $2\pi/3$.

Из формул (5.106) и (5.111) получаем вклад в коэффициент Боголюбова β_k , обусловленный анизотропией:

$$\beta_k = -\frac{i\pi^{1/2}}{2\omega} \sum_i k_i^2 \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-2\omega/(\alpha+i\beta)}}{(\alpha+i\beta)^{1/2}} e^{-i\delta_i} \right). \quad (5.124)$$

Подставляя это выражение в формулу (5.113), найдем соответствующий вклад в плотность энергии в out-области

$$\rho = \frac{\bar{m}^2}{1536\pi^{1/2}a^4} \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^{3/2}}{\alpha^2} e^{-3a\bar{m}^2/(\alpha^2 + \beta^2)} W^{-3/2, 3/2} \left(\frac{2a\bar{m}^2}{\alpha^2 + \beta^2} \right), \quad (5.125)$$

где W — функция Уиттекера. В предельном случае $\xi = 1/6$, $m = 0$ этот вклад является единственным и сводится к

$$\rho = \frac{1}{2880\pi} \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^{3/2}}{\alpha^3 a^4}. \quad (5.126)$$

Поскольку в этом случае требуется выполнение лишь первого условия в (5.102), выражение для плотности энергии (5.126) оказывается справедливым при любом выборе масштабного фактора $a(\eta) = C^{1/2}(\eta)$, что позволяет использовать его при сравнении различных космологических гипотез ([43], см. также разд. 7.4).

ПЕРЕНОРМИРОВКА ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

В предшествовавших главах подробно исследовано рождение частиц переменным гравитационным полем. Как отмечалось, лишь в исключительных случаях понятие частиц в искривленном пространстве-времени в достаточной степени соответствует интуитивным физическим представлениям об элементарных частицах. Вообще говоря, естественного определения понятия частиц не существует, а реакция детектора оказывается такой, что ее трудно интерпретировать в терминах частиц.

Для некоторых задач более целесообразно рассматривать средние значения других наблюдаемых. Затруднения в определении понятия частицы отчасти связаны с глобальным характером этого понятия, опирающегося на представление о полевых модах, которые зависят от крупномасштабной структуры пространства-времени. В отличие от этого реальные детекторы частиц по крайней мере квазилокальны. Поэтому правильнее рассматривать не глобальные физические величины, а величины, имеющие локальный характер, т. е. определенные в отдельной точке пространства-времени. Одним из таких объектов, представляющих физический интерес, является тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}(x)$, заданный в точке x . Особое значение тензора энергии-импульса состоит в том, что он не только описывает физическую структуру квантового поля в точке x , но и служит источником гравитационного поля в уравнениях Эйнштейна. Поэтому он играет важную роль во всех попытках построения модели самосогласованной динамики гравитационного поля, взаимодействующего с квантованными материальными полями. Для многих приложений, в частности астрофизических, основной интерес представляет обратное воздействие квантовых процессов на геометрию пространства-времени.

В этой главе будет сформулирован аппарат, позволяющий рассчитывать $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ для различных квантованных полей. В таких расчетах имеется ряд необычных моментов, требующих особого внимания. Большая часть главы посвящена подробному обсуждению различных методов регуляризации для получения конечного перенормированного $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ из бесконечных величин, на первый взгляд не имеющих смысла. Хотя читатель, вероятно, знаком

из опубликованных работ с этими разнообразными методами, мы хотим подчеркнуть, что окончательные результаты не зависят от конкретного метода регуляризации. Здесь представлены все основные методы регуляризации не только для полноты, но и для того, чтобы продемонстрировать их взаимосвязь и согласованность. Для понимания содержания последующих разделов, где рассматриваются приложения к частным случаям фоновых метрик, представляющих особый интерес, владения всеми этими методами не требуется.

Как правило, мы будем работать с эффективным действием a не с $T_{\mu\nu}$, что позволяет добиться некоторых упрощений, в особенности когда применяемые аналитические методы достаточно сложны. Однако подход остается весьма формальным и часто требует манипулирования величинами, смысл которых в рассматриваемой задаче не совсем ясен. Возможно, читатель будет испытывать неудобства, встречаясь с такими необычными величинами, как $\ln G_F$, и предпочел бы рассчитывать $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ непосредственно, особенно если при этом используются неаналитические методы регуляризации.

Наряду с гл. 3 данная глава составляет основу рассматриваемого предмета. Она значительно длиннее и содержит больше технических деталей, чем другие главы книги. Мы рекомендуем при первом чтении обратить внимание на метод регуляризации с помощью аналитического продолжения по размерности, а также на конформные аномалии. Затем, освоив применение размерной регуляризации для перенормировок и ознакомившись с конкретными примерами, такими, как пространство де Ситтера в разд. 6.4, читатель, по-видимому, захочет изучить и другие методы регуляризации. В частности, регуляризация с помощью раздвижки точек и адиабатическая регуляризация являются наилучшими отправными пунктами для тех, кто пожелает провести вычисления для конкретных моделей. Эта глава содержит всю основную информацию, необходимую для проведения таких расчетов.

Последний раздел данной главы может быть с пользой прочитан и без глубокого понимания теории регуляризации и перенормировок.

Более раннее обсуждение регуляризации в квантовой теории поля в искривленном пространстве можно найти в работах Утиямы и де Витта [471] и Халперна [267]. Некоторые физические предположения были высказаны Сахаровым [412] и развиты Грибом и Мамаевым [250].

Формализм, несколько отличающийся от описываемого здесь, развит в работах [326, 402] на основании нелинейного обобщения квантовой механики, предложенного Кибблом [325].

6.1. Основная проблема

Как было отмечено в разд. 2.4, математическое ожидание оператора H в вакуумном состоянии бесконечно даже в пространстве Минковского. В разд. 4.1—4.3 мы также обнаружили, что величина $\langle 0 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle$ имеет ультрафиолетовые расходимости. Такое поведение симптоматично для всех задач, в которых пытаются вычислить среднее значение оператора, квадратичного по напряженности поля. Например, величина $\langle 0 | \phi^2(x) | 0 \rangle$ может быть найдена как предел при $x' \rightarrow x$ функции Грина $G^{(1)}(x, x')$ (см. (2.66)). Однако из разложения де Витта — Швингера (3.141) следует, что в общем случае G_F (и, следовательно, $G^{(1)}$) при $\sigma \rightarrow 0$ расходится как $\sigma^{(2-n)/2}$ (или как $\ln \sigma$ для $n = 2$).

В квантовой теории поля в пространстве Минковского эту расходимость легко исключить, например, с помощью нормального упорядочения операторов (см. (2.41)). Если топология пространства нетривиальна, но геометрия по-прежнему плоская, как в случаях, рассмотренных в разд. 4.1, 4.2, для обрезания ультрафиолетовой расходимости можно использовать регуляризующую функцию $e^{-\alpha|k|}$, а затем взять разность величины $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ в интересующей нас топологии и соответствующей (обрезанной) величины в пространстве Минковского, полагая $\alpha \rightarrow 0$ в конце вычисления. Можно также, используя метод функции Грина, вычесть неограниченную величину $G^{(1)}(x, x')$, построенную в пространстве Минковского, из функции $G^{(1)}$, вычисленной в рассматриваемой топологии, и лишь затем перейти к пределу при $x \rightarrow x'$.

В искривленном пространстве-времени эти простые приемы не заслуживают доверия по следующим двум причинам. Первая касается роли тензора $T_{\mu\nu}$ в теории гравитации. В негравитационной физике наблюдаема лишь разность энергий, поэтому бесконечная энергия вакуума никого не смущает — достаточно сдвинуть начало отсчета на бесконечную величину. При учете гравитации эта процедура становится неудовлетворительной. Энергия является источником тяготения и изменяет кривизну самого пространства-времени, влияние которого мы и пытаемся изучать. Она не может быть просто отброшена: мы не имеем права изменять начало отсчета энергии. Вместо этого требуется менее формальная схема перенормировок, учитывающая динамику гравитационного поля.

Вторая причина затруднений может быть проиллюстрирована на простом примере. Рассмотрим пространственно-плоскую модель Робертсона — Уокера с масштабным фактором

$$a(t) = (1 - A^2 t^2)^{1/2}, \quad A = \text{const}, \quad (6.1)$$

имеющим физические особенности при $t = \pm A^{-1}$

Безмассовое скалярное поле, в случае четырех измерений удовлетворяющее волновому уравнению

$$\square \phi = 0, \quad (6.2)$$

не является конформно-связанным, но удастся найти решения для полевых мод [80]

$$u_k = (16\pi^3)^{-1/2} C^{-1/2}(\eta) (k^2 + A^2)^{-1/4} \exp[ik \cdot x - i(k^2 + A^2)^{1/2} \eta], \quad (6.3)$$

где $C(\eta) = a^2(\eta) = \cos^2 A\eta$ и η — конформное время.

С помощью мод (6.3) можно построить пространство Фока и использовать вакуумное состояние $|0\rangle$ при вычислении $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$. Из выражения (3.190) находим тензор энергии-импульса для случая минимальной связи $\xi = 0$:

$$T_{\mu\nu} = \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\sigma\rho} \phi_{,\sigma} \phi_{,\rho}, \quad (6.4)$$

который имеет ту же форму, что и выражение (2.26) для плоского пространства-времени при $m = 0$. Используя формулу (2.43) (которая справедлива и в искривленном пространстве), для плотности энергии получаем

$$\langle 0|T_0^0|0\rangle = (1/32\pi^3 C^2) \int d^3k \left[(k^2 + A^2)^{1/2} + \left(k^2 + \frac{1}{4} D^2 \right) (k^2 + A^2)^{-1/2} \right], \quad (6.5)$$

где $D(\eta) = C^{-1} \partial C / \partial \eta$.

Как и следовало ожидать, этот интеграл имеет расходимость четвертой степени. Если ввести в (6.5) обрезающий множитель $\exp[-\alpha(k^2 + A^2)^{1/2}]$, интеграл можно выразить через функции Макдональда. Разлагая полученное выражение по степеням α , находим

$$\rho a^4 = (32\pi^2)^{-1} \left[48/\alpha^4 + (D^2 - 8A^2)/\alpha^2 + A^2 \left(\frac{1}{2} D^2 - A^2 \right) \ln \alpha \right] + O(\alpha^0), \quad (6.6)$$

где плотность энергии обозначена через ρ , а C^2 — через a^4 . Левая часть (6.6) представляет собой энергию безмассового излучения в объеме a^3 с учетом красного смещения при расширении вселенной.

Чтобы получить соответствующий результат в пространстве Минковского, достаточно положить в (6.6) $a = 1$ и $D = A = 0$. Отличным от нуля остается лишь первое слагаемое в правой части (6.6). Следовательно, если даже отбросить этот член, в искривленном пространстве-времени величина ρa^4 все еще будет расходиться в пределе при $\alpha \rightarrow 0$. Иначе говоря, разность нулевых энергий во вселенной Робертсона — Уокера и в пространстве Минковского по-прежнему бесконечна. Мы не сможем

избавиться от расходимости в выражении для $\langle 0|T_{00}|0\rangle$, просто отбрасывая бесконечный член, характерный для пространства Минковского.

Из выражения (6.6) видно, что помимо ожидаемой расходимости четвертого порядка имеются также квадратичная и логарифмическая расходимости. Поэтому выделение бесконечностей в $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ требует более внимательного подхода, нежели в случае плоского пространства-времени.

Каким образом можно выяснить физический смысл расходящегося выражения? Очевидно, для получения конечного ответа необходимо вычитание бесконечных величин, но это можно сделать бесконечным числом способов. Для того чтобы получить однозначный ответ, необходимо наложить дополнительные требования. Расходимости имеются и в квантовой теории поля в пространстве Минковского, в особенности это касается случая взаимодействующих полей. В квантовой электродинамике можно выполнить бесконечные вычитания систематически и получить конечные результаты, согласующиеся с экспериментом, при условии, что вычитания проводятся ковариантным образом (см., например, [427, 472—474]). Поэтому, имея дело с бесконечностями в $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, следует прежде всего пытаться сохранить общую ковариантность теории. Помимо требования общей ковариантности, необходимо также потребовать выполнения ряда «физически разумных» условий на $\langle T_{\mu\nu} \rangle$. Если наложить на $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ достаточное число таких условий, то процедура вычитаний становится однозначной. Мы увидим в разд. 6.6, что такой подход действительно может быть осуществлен.

Альтернативная стратегия состоит в рассмотрении $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ как величины, входящей в более широкую динамическую теорию, включающую гравитацию. В рассматриваемой в данной книге полуклассической теории гравитационное поле считается классическим, в то время как материальные поля (включая гравитоны в однопетлевом приближении, см. гл. 1) трактуются квантовым образом. Это напоминает полуклассическую теорию, успешно применявшуюся в электродинамике, где классическое электромагнитное поле связывалось со *средним значением* оператора электромагнитного тока. По аналогии мы строим теорию, основанную на уравнениях Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (6.7)$$

в которых тензор энергии-импульса, являющийся источником поля, теперь рассматривается как квантовое среднее значение:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda_B g_{\mu\nu} = -8\pi G_B \langle T_{\mu\nu} \rangle. \quad (6.8)$$

Космологическая постоянная Λ и гравитационная постоянная G снабжены индексом B по причине, которая будет ясна из

дальнейшего. В этой главе мы будем явно выписывать гравитационную постоянную G , которая в других разделах книги полагается равной единице.

Классическое уравнение Эйнштейна (6.7) может быть получено из действия

$$S = S_g + S_m \quad (6.9)$$

с помощью вариационного принципа

$$\frac{2}{(-g)^{1/2}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0. \quad (6.10)$$

Первый член в правой части (6.9) представляет собой действие для гравитационного поля

$$S_g = \int L_g (-g)^{1/2} d^n x = \int (-g)^{1/2} (16\pi G_B)^{-1} (R - 2\Lambda) d^n x, \quad (6.11)$$

и вариационная производная $2(-g)^{-1/2} \delta S_g / \delta g^{\mu\nu}$ дает левую часть (6.7). Второй член в (6.9) есть классическое действие материальных полей, варьирование которого

$$\frac{2}{(-g)^{1/2}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} = T_{\mu\nu} \quad (6.12)$$

приводит к правой части (6.7).

Как можно использовать эту процедуру для полуклассического уравнения (6.8)? Можно попытаться построить величину W , называемую *эффективным действием* для квантованных материальных полей, варьирование которой давало бы $\langle T_{\mu\nu} \rangle$:

$$\frac{2}{(-g)^{1/2}} \frac{\delta W}{\delta g^{\mu\nu}} = \langle T_{\mu\nu} \rangle \quad (6.13)$$

(точный смысл операции усреднения $\langle \rangle$, применяемой к $T_{\mu\nu}$ будет выяснен ниже).

Для изучения структуры W вернемся к основным принципам теории, вспомнив процедуру квантования с помощью интегралов по траекториям, коротко описанную в разд. 2.8. Наши рассуждения непосредственно относятся к скалярному полю, но формально выкладки не отличаются и для полей высших спинов. В разд. 2.8 производящий функционал

$$Z[J] = \int \mathcal{D}[\phi] \exp \left\{ i S_m[\phi] + i \int J(x) \phi(x) d^n x \right\} \quad (6.14)$$

был интерпретирован физически как амплитуда вероятности вакуумного перехода $\langle \text{out}, 0 | 0, \text{in} \rangle$. Наличие внешнего тока J делает начальное состояние вакуума нестабильным, т. е. приводит к рождению частиц. В плоском пространстве в пределе $J = 0$ частицы не рождаются, и мы имеем условие нормировки

$$Z[0] = \langle \text{out}, 0 | 0, \text{in} \rangle_{J=0} = \langle 0 | 0 \rangle = 1. \quad (6.15)$$

Однако в искривленном пространстве-времени, как мы видели, вообще говоря, $|0, \text{out}\rangle \neq |0, \text{in}\rangle$ даже в отсутствие источника J . Поэтому условие (6.15) становится неприменимым.

Квантование с помощью интегралов по траекториям пригоден и в искривленном пространстве-времени; достаточно считать S_m в (6.14) действием для материальных полей в искривленном пространстве, а $J(x)$ — соответствующей плотностью тока (скалярной плотностью в случае скалярного поля). Поэтому можно положить $J = 0$ в (6.14) и рассматривать вариацию $Z[0]$:

$$\delta Z[0] = i \int \mathcal{D}[\phi] \delta S_m e^{iS_m[\phi]} = i \langle \text{out}, 0 | \delta S_m | 0, \text{in} \rangle \quad (6.16)$$

в соответствии с вариационным принципом Швингера [428]. Сопоставляя (6.16) и (6.12), будем иметь

$$\frac{2}{(-g)^{1/2}} \frac{\delta Z[0]}{\delta g^{\mu\nu}} = i \langle \text{out}, 0 | T_{\mu\nu} | 0, \text{in} \rangle. \quad (6.17)$$

Поскольку материальное действие S_m появляется в (6.14) в показателе экспоненты, можем отождествить

$$Z[0] = e^{iW}, \quad (6.18)$$

или, иначе

$$W = -i \ln \langle \text{out}, 0 | 0, \text{in} \rangle; \quad (6.19)$$

тогда из (6.17) найдем

$$\frac{2}{(-g)^{1/2}} \frac{\delta W}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\langle \text{out}, 0 | T_{\mu\nu} | 0, \text{in} \rangle}{\langle \text{out}, 0 | 0, \text{in} \rangle}. \quad (6.20)$$

Функционал $Z[0]$ строится по той же схеме, что и в случае плоского пространства-времени (см. с. 36). Но при этом нужно 1) заменить $d^n x$ на ковариантную меру $d^n x [-g(x)]^{1/2}$; 2) заменить $\delta^n(x-y)$ произведением $\delta^n(x-y) [-g(y)]^{-1/2}$, для которого инвариантный интеграл

$$\int d^n x [-g(x)]^{1/2} \delta^n(x-y) [-g(y)]^{-1/2} = 1,$$

и 3) вместо (2.120) ввести оператор

$$K_{xy} = (\square_x + m^2 - i\epsilon + \xi R) \delta^n(x-y) [-g(y)]^{-1/2}, \quad (6.21)$$

для которого с учетом соотношения

$$\int d^n y [-g(y)]^{1/2} K_{xy} K_{yz}^{-1} = \delta(x-z) [-g(z)]^{-1/2} \quad (6.22)$$

и формулы (3.49) находим

$$K_{xz}^{-1} = -G_F(x, z) \quad (6.23)$$

(ср. (2.123)). С помощью выкладок, аналогичных выполненным на с. 37, найдем (как и в плоском пространстве-времени)

$$Z[0] \sim [\det(-G_F)]^{1/2}, \quad (6.24)$$

причем коэффициент пропорциональности, не зависящий от метрики, не существен. В результате мы приходим к формуле

$$W = -i \ln Z[0] = -\frac{1}{2} i \operatorname{tr} [\ln(-G_F)]. \quad (6.25)$$

В этой формуле G_F можно рассматривать как оператор, действующий в пространстве векторов $|x\rangle$, нормированных условием

$$\langle x | x' \rangle = \delta^n(x - x') [-g(x)]^{-1/2} \quad (6.26)$$

так, что

$$G_F(x, x') = \langle x | G_F | x' \rangle. \quad (6.27)$$

След оператора M , действующего в этом пространстве, определен как

$$\operatorname{tr} M = \int d^n x [-g(x)]^{1/2} M_{xx} = \int d^n x [-g(x)]^{1/2} \langle x | M | x \rangle. \quad (6.28)$$

Чтобы придать смысл формальному выражению (6.23), необходимо использовать некоторое представление для фейнмановской функции Грина G_F . Мы воспользуемся представлением де Витта — Швингера в терминах интеграла по собственному времени (3.138). Записав операторный аналог соотношения (6.23) в виде

$$G_F = -K^{-1} = -i \int_0^\infty e^{-iKs} ds, \quad (6.29)$$

из (3.138) будем иметь

$$\begin{aligned} \langle x | e^{-iKs} | x' \rangle &= i(4\pi)^{-n/2} \Delta^{1/2}(x, x') e^{-im's + \sigma/2is} \times \\ &\times F(x, x'; is) (is)^{-n/2}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Далее, предполагая, что K имеет малую отрицательную мнимую часть, найдем

$$\int_\Lambda^\infty e^{-iKs} (is)^{-1} ds = -\operatorname{Ei}(-i\Lambda K). \quad (6.31)$$

Здесь Ei — интегральная показательная функция, для которой при малых значениях аргумента справедливо разложение

$$\operatorname{Ei}(x) = \gamma + \ln(-x) + O(x), \quad (6.32)$$

где γ — постоянная Эйлера. Подставляя (6.32) в (6.31) и полагая $\Lambda \rightarrow 0$, будем иметь

$$\ln(-G_F) = -\ln(K) = \int_0^\infty e^{-iKs} (is)^{-1} i ds, \quad (6.33)$$

что верно с точностью до не зависящей от метрики (бесконечной) константы, которая для дальнейшего не существенна. Таким образом, в представлении де Витта — Швингера (6.30) (или (3.138)) имеем

$$\langle x | \ln(-G_F^{DS}) | x' \rangle = - \int_{m^2}^\infty G_F^{DS}(x, x') dm^2, \quad (6.34)$$

где интеграл по переменной m^2 сокращает добавочный множитель $(is)^{-1}$ в (6.33).

Возвращаясь к выражению (6.25) для W , из (6.28) и (6.34) находим

$$W = \frac{1}{2} i \int d^n x [-g(x)]^{1/2} \lim_{x' \rightarrow x} \int_{m^2}^\infty dm^2 G_F^{DS}(x, x'). \quad (6.35)$$

Изменяя порядок интегрирования и переходя к пределу при $x' \rightarrow x$, получаем

$$W = \frac{1}{2} i \int_{m^2}^\infty dm^2 \int d^n x [-g(x)]^{1/2} G_F^{DS}(x, x),$$

где интеграл по $d^n x$, как нетрудно видеть, представляет собой выражение, описываемое однопетлевой фейнмановской диаграммой, изображенной на рис. 1, а (о правилах Фейнмана см. гл. 9). Поэтому величина W получила название *однопетлевого эффективного действия*. В случае фермионов эффективное действие содержит также след по спинорным индексам.

С помощью (6.35) можно ввести *плотность эффективного лагранжиана* $\mathcal{L}_{\text{эфф}}$, исходя из соотношения

$$W = \int \mathcal{L}_{\text{эфф}}(x) d^n x \equiv \int [-g(x)]^{1/2} L_{\text{эфф}}(x) d^n x. \quad (6.36)$$

Для этой величины находим

$$L_{\text{эфф}}(x) = [-g(x)]^{1/2} \mathcal{L}_{\text{эфф}}(x) = \frac{1}{2} i \lim_{x' \rightarrow x} \int_{m^2}^\infty dm^2 G_F^{DS}(x, x'). \quad (6.37)$$

Использование выражений (3.137) и (3.138) показывает, что $L_{\text{эфф}}$ расходится на нижнем пределе интеграла по s , поскольку

сглаживающий множитель $\sigma/2s$ в показателе экспоненты в пределе $x' \rightarrow x$ исчезает. (Сходимость на верхнем пределе гарантируется добавкой $-i\epsilon$, которая в представлении де Витта — Швингера для G_F неявно включена в m^2 .) В четырехмерном случае потенциально расходящимися в разложении де Витта — Швингера для $L_{\text{эфф}}$ являются члены

$$L_{\text{расх}} = - \lim_{x' \rightarrow x} \frac{\Delta^{1/2}(x, x')}{32\pi^4} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-i(m^2 s - \sigma/2s)} \times \\ \times [a_0(x, x') + a_1(x, x')is + a_2(x, x')(is)^2], \quad (6.38)$$

где функции a_0 , a_1 и a_2 определяются формулами (3.131) — (3.133). Остальные члены в асимптотическом разложении, начиная с a_3 , в пределе $x' \rightarrow x$ конечны.

Расходимости в $L_{\text{эфф}}$ конечно те же, что и для $\langle T_{\mu\nu} \rangle$. Из формул (3.131) — (3.133) следует, что в пределе $x' \rightarrow x$ выражение в квадратных скобках в (6.38) имеет чисто геометрический характер, т. е. построено из компонент локального тензора $R_{\mu\nu\sigma\tau}$ и его производных. Эта особенность не случайна, как видно из следующих соображений. Расходимости возникают вследствие «плохого» поведения мод в ультрафиолетовом пределе. Все короткие волны чувствительны лишь к локальной геометрии в окрестности точки x и нечувствительны к глобальным свойствам пространства-времени, таким, как топология или поведение в прошлом. Ниже мы увидим, что расходимости не зависят и от выбора квантового состояния поля.

Поскольку $L_{\text{расх}}$ имеет чисто геометрический характер, эту величину следует скорее рассматривать как вклад в *гравитационный* лагранжиан, чем в лагранжиан материальных полей. Хотя величина $L_{\text{расх}}$ обусловлена действием для квантового материального поля, она зависит только от переменных, описывающих гравитационное поле. Конечно, это не справедливо для остальных конечных членов в $L_{\text{эфф}}$, учитывающих и длинноволновый вклад. Они чувствительны к крупномасштабной структуре многообразия и зависят от выбора квантового состояния.

6.2. Перенормировка в эффективном действии

Обратимся к отысканию точной формы геометрических членов $L_{\text{расх}}$, чтобы сравнить их с обычным гравитационным лагранжианом L_g , фигурирующим в (6.11). Эта задача требует осторожности, поскольку выражение (6.38) расходится. Фактически нам необходимо показать, что расходящаяся часть может быть представлена в виде произведения $\infty \times$ геометрический объект. Это можно сделать различными способами,

Например, в случае n измерений асимптотическое (адиабатическое) разложение $L_{эфф}$ имеет вид

$$L_{эфф} \approx \lim_{x' \rightarrow x} \frac{\Delta^{1/2}(x, x')}{2(4\pi)^{n/2}} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x, x') \int_0^{\infty} (is)^{j-1-n/2} e^{-i(m^2s - \sigma/2s)} i ds, \quad (6.39)$$

где первые $n/2 + 1$ члена расходятся при $\sigma \rightarrow 0$. Если n рассматривать как переменную, которая может быть аналитически продолжена в комплексную плоскость, то можно перейти к пределу при $x' \rightarrow x$:

$$L_{эфф} \approx \frac{1}{2} (4\pi)^{-n/2} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) \int_0^{\infty} (is)^{j-1-n/2} e^{-im^2s} i ds = \quad (6.40)$$

$$= \frac{1}{2} (4\pi)^{-n/2} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) (m^2)^{n/2-j} \Gamma(j - n/2), \quad (6.41)$$

где

$$a_j(x) \equiv a_j(x, x).$$

В дальнейшем удобно сохранить для $L_{эфф}$ размерность (длина)⁻⁴ даже в случае $n \neq 4$. Для этого следует ввести произвольный масштаб массы μ и переписать (6.41) в виде

$$L_{эфф} \approx \frac{1}{2} (4\pi)^{-n/2} (m/\mu)^{n-4} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) m^{4-2j} \Gamma(j - n/2). \quad (6.42)$$

При $n \rightarrow 4$ первые три члена в (6.42) расходятся из-за наличия полюсов у Γ -функций:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(-\frac{n}{2}\right) &= \frac{4}{n(n-2)} \left(\frac{2}{4-n} - \gamma\right) + O(n-4), \\ \Gamma\left(1 - \frac{n}{2}\right) &= \frac{2}{2-n} \left(\frac{2}{4-n} - \gamma\right) + O(n-4), \\ \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) &= \frac{2}{4-n} - \gamma + O(n-4). \end{aligned} \quad (6.43)$$

Обозначая эти первые три члена $L_{расх}$, получаем [72]

$$\begin{aligned} L_{расх} &= -(4\pi)^{-n/2} \left\{ \frac{1}{n-4} + \frac{1}{2} \left[\gamma + \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) \right] \right\} \times \\ &\quad \times \left(\frac{4m^4 a_0}{n(n-2)} - \frac{2m^2 a_1}{n-2} + a_2 \right), \end{aligned} \quad (6.44)$$

где мы использовали разложение

$$\left(\frac{m}{\mu}\right)^{n-4} = 1 + \frac{1}{2} (n-4) \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) + O((n-4)^2) \quad (6.45)$$

и опустили в (6.43) члены, исчезающие при $n \rightarrow 4$.

Функции a_0 , a_1 и a_2 получаются в пределе совпадающих точек из выражений (3.131)—(3.133) и (3.129):

$$a_0(x) = 1, \quad a_1(x) = \left(\frac{1}{6} - \xi\right) R, \quad (6.46), (6.47)$$

$$a_2(x) = \frac{1}{180} R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{180} R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{5} - \xi\right) \times \\ \times \square R + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} - \xi\right)^2 R^2. \quad (6.48)$$

Теперь очевидно, что выражение $L_{\text{расх}}$ (6.44) представляет собой чисто геометрическую величину. Здесь уместно напомнить, что $L_{\text{эфф}}$ является лишь частью полного лагранжиана, помимо которой имеется гравитационная часть. Поскольку $L_{\text{расх}}$ имеет чисто геометрический характер, можно попытаться включить его в гравитационный лагранжиан.

Используя (6.11), представим плотность полного гравитационного лагранжиана в виде произведения $(-g)^{1/2}$ на

$$-\left(A + \frac{\Lambda_B}{8\pi G_B}\right) + \left(B + \frac{1}{16\pi G_B}\right) R - \frac{a_2(x)}{(4\pi)^{n/2}} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{n-4} + \frac{1}{2} \left[\gamma + \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \right] \right\}, \quad (6.49)$$

где

$$A = \frac{4m^4}{(4\pi)^{n/2} n (n-2)} \left\{ \frac{1}{n-4} + \frac{1}{2} \left[\gamma + \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \right] \right\}, \\ B = \frac{2m^2 \left(\frac{1}{6} - \xi \right)}{(4\pi)^{n/2} (n-2)} \left\{ \frac{1}{n-4} + \frac{1}{2} \left[\gamma + \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \right] \right\}.$$

Первый член в (6.49) есть постоянная. Вклад от $L_{\text{расх}}$ (т. е. величина A) физически неотличим от Λ_B . Эта часть гравитационного лагранжиана приводит к возникновению так называемого космологического члена $\Lambda g_{\mu\nu}$ в уравнениях гравитационного поля (6.8). Таким образом, влияние скалярного квантованного поля состоит в изменении или перенормировке значения космологической постоянной Λ_B :

$$\Lambda \equiv \Lambda_B + \frac{32\pi m^4 G_B}{(4\pi)^{n/2} n (n-2)} \left\{ \frac{1}{n-4} + \frac{1}{2} \left[\gamma + \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \right] \right\}. \quad (6.50)$$

Поскольку физические наблюдения всегда будут давать лишь перенормированное значение Λ , величиной Λ_B можно не интересоваться и не беспокоиться о том, что при $n \rightarrow 4$ величина в квадратных скобках в (6.50) расходится (мы никогда не сможем измерить эту величину отдельно). Такой метод включения бес-

конечностей в перенормировочные физические величины обычен в квантовой теории поля. Например, в квантовой электродинамике электрон оказывается одетым в «шубу» виртуальных фотонов, которые дают (бесконечный) вклад в полную массу электрона. Измеримой является лишь перенормированная масса электрона (которая, безусловно, конечна). Электрон неотделим от своей фотонной шубы, и мы никогда не сможем измерить «голую» массу. Используя эту терминологию, мы можем сказать, что «голая» космологическая постоянная Λ_B также ненаблюдаема (индекс B означает «bare» — голая).

Обращаясь ко второму члену в (6.49) находим, что $L_{\text{расх}}$ также перенормирует ньютоновскую гравитационную постоянную, превращая G_B в

$$G = G_B / (1 + 16\pi G_B B). \quad (6.51)$$

Последний член в (6.49) в обычном эйнштейновском лагранжиане отсутствует. Функция $a_2(x)$ — величина четвертого адиабатического порядка, поскольку она содержит четыре производных от метрики (см. (6.48)). Ее следует рассматривать как поправку высшего порядка к лагранжиану общей теории относительности, в который входят лишь вторые производные от метрики. Если включить этот добавочный член в S_g , левая часть уравнений для гравитационного поля принимает вид

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \alpha^{(1)} H_{\mu\nu} + \beta^{(2)} H_{\mu\nu} + \gamma H_{\mu\nu}, \quad (6.52)$$

где

$$\begin{aligned} {}^{(1)}H_{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{(-g)^{1/2}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int (-g)^{1/2} R^2 d^n x = \\ &= 2R_{;\mu\nu} - 2g_{\mu\nu} \square R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^2 + 2RR_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (6.53)$$

$$\begin{aligned} {}^{(2)}H_{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{(-g)^{1/2}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int (-g)^{1/2} R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} d^n x = \\ &= R_{;\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \square R - \square R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + 2R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta\mu\nu} = \\ &= 2R_{\mu;\nu\alpha}^{\alpha} - \square R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \square R + 2R_{\mu}^{\alpha} R_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (6.54)$$

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{(-g)^{1/2}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int (-g)^{1/2} R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} d^n x = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \\ &+ 2R_{\mu\alpha\beta\gamma} R_{\nu}^{\alpha\beta\gamma} - 4\square R_{\mu\nu} + 2R_{;\mu\nu} - 4R_{\mu\alpha} R_{\nu}^{\alpha} + 4R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta\mu\nu}. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Заметим, что в случае $n=4$ обобщенная теорема Гаусса — Бонне [108, 109] утверждает, что величина

$$\int d^4(x) [-g(x)]^{1/2} (R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} + R^2 - 4R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}) \quad (6.56)$$

является топологическим инвариантом (называемым числом Эйлера), так что ее вариация по метрике тождественно равна нулю. Тогда из (6.53) — (6.55) следует

$$H_{\mu\nu} = - {}^{(1)}H_{\mu\nu} + 4 {}^{(2)}H_{\mu\nu}. \quad (6.57)$$

Коэффициенты α , β и γ в (6.52) содержат множитель $1/(n-4)$ и, следовательно, расходятся, когда n стремится к физической размерности пространства-времени $n=4$. Поэтому мы должны ввести в исходный гравитационный лагранжиан члены четвертого адиабатического порядка с «голыми» коэффициентами a_B , b_B , c_B , которые затем используются для поглощения бесконечных членов, пропорциональных α , β , γ , и дают перенормированные значения a , b , c . Поскольку при $n=4$ ввиду (6.57) лишь два из этих коэффициентов независимы, мы можем положить $c=0$. Значения постоянных a и b могут быть найдены только из эксперимента. Чтобы избежать противоречия с наблюдениями, следует предположить, что численные значения a и b весьма малы (см., например, [215, 442, 443]). В принципе нет причины, по которой эти перенормированные величины нельзя положить равными нулю, что возвращает нас к эйнштейновской теории. Квантовая теория поля лишь указывает, что члены, включающие высшие производные метрики, априори могут присутствовать в лагранжиане¹⁾.

Прием, состоящий в аналитическом продолжении размерности пространства-времени n на область нефизических значений, позволяет сделать формально расходящуюся часть $L_{\text{расх}}$ временно конечной, так что с отдельными вкладками в эту величину можно проводить осмысленные действия и включить их в гравитационный лагранжиан. Такое преобразование формально расходящихся выражений называется *регуляризацией*. Использованный выше подход известен как размерная регуляризация; он был впервые использован в теориях взаимодействующих квантованных полей в пространстве Минковского [7, 57, 458]. В конце вычислений, после того как выполнена перенормировка затравочных констант, регуляризация может быть снята, т. е. $n \rightarrow 4$.

После удаления $L_{\text{расх}}$ из $L_{\text{эфф}}$ остающаяся часть становится конечной и представляет собой перенормированный эффективный лагранжиан

$$L_{\text{рен}} \equiv L_{\text{эфф}} - L_{\text{расх}}. \quad (6.58)$$

¹⁾ Обсуждение теорий с высшими производными см. в работах [576*—578*]. Такие теории перенормируемы [442] и асимптотически свободны [578*], хотя в теории возмущений появляются тахионы и духи. См. также [579*—582*]. — Прим. перев.

В случае четырех измерений асимптотическое разложение $L_{\text{рен}}$ содержит все члены с $j \geq 3$ в (6.40). Полагая $n = 4$ и $x' = x$, можем записать это асимптотическое разложение в виде

$$L_{\text{рен}} \approx \frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty \sum_{j=3}^\infty a_j(x) (is)^{j-3} e^{-ism^2} i ds, \quad (6.59)$$

или, проинтегрировав трижды по частям (см. (3.140)),

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \ln(is) \frac{\partial^3}{\partial (is)^3} [F(x, x; is) e^{-ism^2}] d(is) + \\ & + \frac{1}{64\pi^2} \int_0^\infty \ln(is) \frac{\partial^3}{\partial (is)^3} \{[a_0 + a_1(is) + a_2(is)^2] e^{-ism^2}\} i ds. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Последний конечный член перенормирует Λ , G , a , b и c на конечные величины; он имеет ту же форму, что и $L_{\text{расх}}$, и содержит функции $\text{const} \times a_j$ при $j = 0, 1, 2$. Очевидно, перенормированный лагранжиан всегда будет определен с точностью до членов такого типа — конечных перенормировочных членов, поэтому мы можем опустить второе слагаемое в (6.60).

По той же причине можно не заботиться о выборе масштаба массы μ , введенного в (6.42). Изменение параметра μ приведет к конечной перенормировке $L_{\text{расх}}$, в результате которой изменятся коэффициенты в геометрических членах a_0 , a_1 и a_2 . Практически следует выбрать некоторое фиксированное значение μ и затем использовать результаты какого-либо расчета с этим значением μ для градуировки измерительного прибора, применяемого для определения констант Λ , G , a и b . Используя измеренные этим прибором константы, можно провести дальнейшие расчеты с тем же значением параметра μ , причем получаемые предсказания следует проверять экспериментально с помощью тех же проградуированных ранее приборов. Если изменить значение μ , необходимо заново проградуировать приборы или заменить параметры Λ , G , a и b ; в результате предсказания теории остаются неизменными. Такой анализ изменения констант при замене масштаба μ в теориях взаимодействующих полей в пространстве Минковского приводит к уравнению ренормгруппы ([457], см. также разд. 9.2). С учетом сказанного вместо (6.60) можно написать

$$L_{\text{рен}} = - \frac{1}{64\pi^2} \int_0^\infty \ln(is) \frac{\partial^3}{\partial (is)^3} [F(x, x; is) e^{-ism^2}] i ds, \quad (6.61)$$

причем подразумевается, что к этому выражению могут быть добавлены любые конечные комбинации a_0 , a_1 и a_2 . Будучи

полученным из асимптотического разложения для F , выражение (6.61) не может рассматриваться как полный лагранжиан, ассоциируемый с физическим перенормированием $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, построение которого откладывается до разд. 6.4. Мы представили $L_{\text{рен}}$ в такой форме лишь для полноты. Следует, однако, заметить, что в принципе полный перенормированный лагранжиан можно было бы найти из (6.61), если располагать точным выражением для F .

Помимо размерной регуляризации существуют и другие способы регуляризации. Рассмотрим разложение по собственным функциям для оператора K^{-1} :

$$K^{-1} = -G_F = \sum_m \frac{|m\rangle\langle m|}{\lambda_m}, \quad (6.62)$$

где

$$K|m\rangle = \lambda_m|m\rangle, \quad \langle n|m\rangle = \delta_{nm}, \quad (6.63)$$

$$\sum_m |m\rangle\langle m| = 1. \quad (6.64)$$

Тогда

$$K^\nu|m\rangle = \lambda_m^\nu|m\rangle, \quad (6.65)$$

так что

$$(-G_F)^\nu = \sum_m \lambda_m^{-\nu} |m\rangle\langle m| \quad (6.66)$$

и, следовательно,

$$\text{tr}(-G_F)^\nu \int d^4x [-g(x)]^{1/2} \sum_m \lambda_m^{-\nu} \langle x|m\rangle\langle m|x\rangle = \sum_m \lambda_m^{-\nu}, \quad (6.67)$$

где мы использовали условие полноты

$$\int d^4x [-g(x)]^{1/2} |x\rangle\langle x| = 1. \quad (6.68)$$

Правая часть (6.67) напоминает ξ -функцию Римана $\sum_{m=1}^{\infty} m^{-\nu}$ и может быть использована для введения обобщенной ξ -функции [171, 172, 175, 231, 281]:

$$\text{tr}(-G_F)^\nu = \sum_m \lambda_m^{-\nu} \equiv \xi(\nu). \quad (6.69)$$

Выразим теперь эффективное действие (6.25) через обобщенную ξ -функцию. Прежде всего заметим, что аргумент логарифма в (6.25) должен быть безразмерным. Поскольку $G_F(x, x')$ имеет размерность (масса) $^{n-2}$, а $|x\rangle$ в (6.26) имеет размерность (масса) $^{n/2}$, из (6.27) видно, что оператор G_F имеет размерность (масса) $^{-2}$. Поэтому мы можем сделать аргумент логарифма в

(6.25) безразмерным для всех n , вставляя множитель μ^2 :

$$W = -\frac{1}{2} i \operatorname{tr} [\ln (-\mu^2 G_F)]. \quad (6.70)$$

Фактически мы уже ввели аналогичную константу, переходя от (6.24) к (6.25). Параметр μ в методе регуляризации с помощью ζ -функции выполняет ту же роль, что и величина μ , введенная в (6.42) в схеме размерной регуляризации. Как и выше, изменение μ приводит лишь к конечным изменениям коэффициентов в перенормировочных членах, которые неоднозначны по своей природе.

Эффективное действие (6.70), выраженное через обобщенную ζ -функцию, принимает вид

$$W = -\frac{1}{2} i \lim_{v \rightarrow 0} \operatorname{tr} \frac{d}{dv} (-\mu^2 G_F)^v = \lim_{v \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{2} i \mu^{2v} [\zeta'(v) + \zeta(v) \ln \mu^2] \right\}. \quad (6.71)$$

Введение обобщенной ζ -функции следует понимать как чисто формальную операцию. Выражение (6.69), вообще говоря, не сходится при всех значениях v . Но эту величину можно определить как аналитическое продолжение из области, в которой ряд сходится. Тогда мы найдем, что $\zeta(0)$ и $\zeta'(0)$ конечны, и можно написать

$$W = -\frac{1}{2} i [\zeta'(0) + \zeta(0) \ln \mu^2]. \quad (6.72)$$

Таким образом, с помощью формального аналитического продолжения расходимости в выражении для эффективного действия W устранены. Этот результат можно сопоставить с соответствующим свойством ζ -функции Римана: ряд $\sum_{m=1}^{\infty} m^{-v}$, очевидно, расходится, если положить $v=0$, но ζ -функция Римана, определяемая этим рядом при $v > 1$, будучи аналитически продолжена в точку $v=0$, имеет конечное значение $1/2$.

Чтобы показать конечность величин $\zeta(0)$ и $\zeta'(0)$, фигурирующих в (6.72), вычислим их явно в представлении собственного времени де Витта — Швингера. Заметим предварительно, что

$$\int_0^{\infty} (is)^{v-1} e^{-iKs} d(is) = K^{-v} \Gamma(v), \quad (6.73)$$

откуда следует

$$(-G_F)^v = K^{-v} = [\Gamma(v)]^{-1} \int_0^{\infty} (is)^{v-1} e^{-iKs} i ds. \quad (6.74)$$

Используя теперь (6.69) и (6.30), для случая четырех измерений получаем

$$\zeta(v) = i [\Gamma(v)]^{-1} (4\pi)^{-2} \int d^4x [-g(x)]^{1/2} \times \\ \times \int_0^\infty (is)^{v-3} e^{-ism^2} F(x, x; is) i ds. \quad (6.75)$$

Если $\operatorname{Re} v > 2$, мы можем трижды проинтегрировать по частям. Вспоминая, что m^2 понимается как $m^2 - i\epsilon$, находим, что подстановки обращаются в нуль, и в результате получаем

$$\zeta(v) = - \frac{i (4\pi)^{-2}}{\Gamma(v+1)(v-1)(v-2)} \int d^4x [-g(x)]^{1/2} \times \\ \times \int_0^\infty (is)^v \frac{\partial^3}{\partial (is)^3} [F(x, x; is) e^{-ism^2}] i ds, \quad (6.76)$$

откуда находим

$$\zeta(0) = i (4\pi)^{-2} \int d^4x [-g(x)]^{1/2} \left[\frac{1}{2} m^4 - m^2 a_1(x) + a_2(x) \right], \quad (6.77)$$

где использовано разложение (3.140) для вычисления

$$\frac{\partial^2}{\partial (is)^2} [F(x, x; is) e^{-ism^2}]_{s=0}.$$

Поскольку $\zeta(0)$ содержит лишь конечные перенормировочные члены, теперь ясно, что изменение μ в (6.72) приведет лишь к конечному изменению перенормировочных коэффициентов в полном действии. Таким образом, для наших целей членом, содержащим $\zeta(0)$ в (6.72), можно пренебречь.

Дифференцирование (6.76) по v дает

$$\zeta'(0) = \frac{1}{2} i (4\pi)^{-2} \left\{ \left(v - \frac{3}{2} \right) \int d^4x [-g(x)]^{1/2} \times \right. \\ \times \left[\frac{1}{2} m^4 - m^2 a_1(x) + a_2(x) \right] - \int d^4x [-g(x)]^{1/2} \int_0^\infty \ln(is) \frac{\partial^3}{\partial (is)^3} \times \\ \times [F(x, x; is) e^{-ism^2}] i ds \Big\}, \quad (6.78)$$

т. е. конечную величину. Первый интеграл в этом выражении содержит лишь конечные перенормировочные члены, которыми также можно пренебречь. Подставляя оставшийся член в (6.72) и используя определение (6.36), получаем

$$L_{\text{рен}} = - \frac{1}{64\pi^2} \int_0^\infty \ln(is) \frac{\partial^3}{\partial (is)^3} [F(x, x; is) e^{-ism^2}] i ds = \\ = L_{\text{эфф}} + \text{конечные перенормировочные члены}, \quad (6.79)$$

что согласуется с результатом (6.61), найденным методом размерной регуляризации.

Заметим, что описанный здесь метод ζ -функции не требует явной перенормировки констант связи в гравитационном лагранжиане, в отличие от метода, примененного Даукером и Кричли [171, 172, 175]. Аналитическое продолжение позволяет получить конечный результат из явно расходящегося ряда (например, ряд $\sum_{m=1}^{\infty} m^{-\nu}$ при $\nu=0$ становится равным $1/2$). Ясно, что бесконечный член был отброшен с помощью этой формальной процедуры.

Можно предположить поэтому, что разные варианты этого метода будут давать разные ответы. Например, если вместо (6.71) подставить логарифм в (6.70) в виде $\lim_{\nu \rightarrow 0} [\nu^{-1} (-\mu^2 G_F)^{\nu} - -\nu^{-1}]$, то мы получим

$$W = -\frac{1}{2} i \lim_{\nu \rightarrow 0} \nu^{-1} \zeta(0) - \frac{1}{2} i [\zeta'(0) + \zeta(0) \ln \mu^2] + c, \quad (6.80)$$

где c — бесконечная не зависящая от метрики константа, которую можно опустить. Выражение (6.80) отличается от (6.72) только в первом слагаемом, которое, как видно из сопоставления с формулой (6.77), описывает бесконечную перенормировку гравитационного действия. Таким образом, *перенормированное* эффективное действие остается тем же самым независимо от того, выполнялась ли бесконечная перенормировка или нет.

Все же может возникнуть некоторое сомнение по поводу однозначности перенормированного эффективного действия. Можно ли быть уверенным, что перенормировочные процедуры, включающие сомнительные формальные манипуляции с расходящимися величинами, всегда приводят к «правильному» ответу? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо, во-первых, установить, каким физическим требованиям должен удовлетворять «правильный» ответ (мы займемся этим в разд. 6.6). Во-вторых, нужно дать строгое математическое обоснование использованному формальным манипуляциям. В случае плоского пространства такая трактовка квантовой теории поля дана в работах [84, 450, 451].

В другом часто используемом методе регуляризации используется расщепление, или раздвижка точек. Основная идея состоит в возвращении к (6.37), где точки x' и x остаются разделенными некоторым бесконечно малым расстоянием в изотропном направлении. Пока σ не равно нулю, $L_{\text{эфф}}$ остается конечным, и интеграл в (6.38) может быть выражен через функции Ханкеля. (Тот же результат можно получить также, подставив первые три члена суммы (3.138) в формулу (6.37).) Используя

асимптотическое разложение функций Ханкеля по степеням σ и оставляя только члены, не исчезающие при $\sigma \rightarrow 0$, получим в случае четырех измерений [114]

$$L_{\text{расх}} = \lim_{x' \rightarrow x} (1/8\pi^2) \Delta^{1/2}(x, x') \left\{ a_0(x, x') \left[\sigma^{-2} + \frac{1}{2} m^2 \sigma^{-1} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{4} m^4 \left(\gamma + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{2} m^2 \sigma \right| \right) + \frac{3}{16} m^4 \right] - \right. \\ \left. - a_1(x, x') \left[\frac{1}{2} \sigma^{-1} - \frac{1}{2} m^2 \left(\gamma + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{2} m^2 \sigma \right| \right) + \frac{1}{4} m^2 \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} a_2(x, x') \left[\gamma + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{2} m^2 \sigma \right| \right] \right\}. \quad (6.81)$$

Величины $a_0(x, x')$, $a_1(x, x')$, $a_2(x, x')$ и $\Delta(x, x')$ теперь можно разложить по степеням σ . Основной член результирующего разложения (6.81) расходится как σ^{-2} . Коэффициенты разложения имеют геометрический характер и определяются тензором Римана и его производными, но, как показывают выражения (3.132) и 3.133), эти коэффициенты содержат векторные величины, обусловленные наличием множителей y^a . Исходя из (3.136), или из общей теории [153], эти векторы можно представить с помощью σ как

$$y^\mu = \sigma^{;\mu} \equiv \sigma^\mu, \quad (6.82)$$

откуда для (3.136) имеем

$$\sigma = \frac{1}{2} \sigma_\mu \sigma^\mu. \quad (6.83)$$

Степень расходимости удобно параметризовать с помощью величины ε , пропорциональной геодезическому расстоянию между x' и x , выделяя (неизотропное) направление расщепления посредством единичного вектора t^μ (рис. 22). Для этого запишем

$$\sigma^\mu = 2\varepsilon t^\mu, \quad (6.84)$$

где

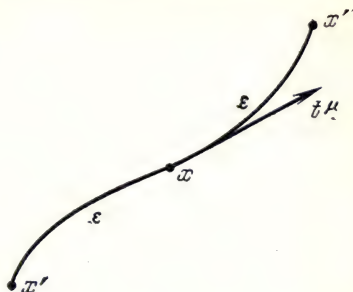
$$t^\mu t_\mu \equiv \Sigma = \pm 1 \quad (6.85)$$

в зависимости от того, является ли вектор t^μ времениподобным или пространственноподобным. Тогда (6.83) принимает вид

$$\sigma = 2\varepsilon^2 \Sigma \quad (6.86)$$

(множитель 2 введен в (6.86) для удобства в дальнейших вычислениях). При такой параметризации главная особенность в $L_{\text{расх}}$ ведет себя как ε^{-4} , а типичный зависящий от направления коэффициент имеет вид $R_{\mu\nu} R_{\rho\sigma} t^\mu t^\nu t^\rho t^\sigma$. (Дальнейшие подробности даны в разд. 6.4.) Такие члены нельзя устранить с по-

Рис. 22. Точки x'' , x' , лежащие на неизотропной геодезической, проходящей через точку x , параметризованные с помощью вектора t^μ , на собственном расстоянии ε от x .



мощью перенормировок, поскольку вектор t^μ имеет искусственный характер, а не определяется из динамики.

Чтобы освободить теорию от членов, зависящих от направления, можно усреднить по всем направлениям, используя подходящую меру [5]. Тогда такие члены сводятся к комбинациям R , R^2 , $R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}$ и $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$, которые устраняются обычным способом путем перенормировки Λ , G , a , b и c в гравитационном действии. Конечный остаток $L_{\text{рен}} = L_{\text{эфф}} - L_{\text{расх}}$, очевидно, воспроизводит формулы (6.59) и (6.61) и, таким образом, согласуется с результатами как размерной, так и ζ -регуляризации. Если нас интересуют уравнения поля, а не само действие, перенормировки постоянной c не требуется. Причина состоит в том, что метод расщепления точек с самого начала используется для случая четырех измерений, когда величина (6.56) является топологическим инвариантом и, следовательно, не дает вклада в уравнения поля при подстановке в функциональную производную (6.10). Это может быть использовано для исключения одной из констант a , b или c из уравнений поля.

Полезно рассмотреть подробнее тесную взаимосвязь методов расщепления точек и размерной регуляризации. Исходным пунктом обоих методов является представление де Витта — Швингера (6.39), в котором можно выполнить интегрирование по s (вспомним (3.141)). Рассмотрим простейший случай пространства Минковского. Тогда $a_0(x, x') = 1$, $a_j(x, x') = 0$, $j > 0$. Вклад дает только первый член ряда; из (3.141) и (6.37) находим

$$L_{\text{эфф}} = \frac{\pi}{2(4\pi i)^{n/2}} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left(\frac{2}{-\sigma} \right)^{(n-2)/4} \int_{m^2}^{\infty} d\bar{m}^2 (\bar{m}^2)^{(n-2)/4} H_{\frac{1}{2}n-1}^{(2)} [(2\bar{m}^2\sigma)^{1/2}] =$$

$$= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{(-1)^{-(n+1)/2} \pi}{2(4\pi)^{n/2}} (2m^2)^{n/4} \sigma^{-n/4} H_{n/2}^{(2)} [(2m^2\sigma)^{1/2}]. \quad (6.87)$$

Если используется размерная регуляризация, то мы хотим иметь возможность положить $\sigma = 0$ в (6.87) и разложить

результат в окрестности $n = 4$. Из асимптотических формул

$$H_{\nu}^{(2)}(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} \begin{cases} (i/\pi) \Gamma(\nu) \left(\frac{1}{2}z\right)^{-\nu}, & \operatorname{Re} \nu > 0, \\ (i/\pi) e^{-\pi\nu i} \Gamma(-\nu) \left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu}, & \operatorname{Re} \nu < 0, \end{cases} \quad (6.88a)$$

ясно, что, для того чтобы сделать (6.87) конечным при $\sigma \rightarrow 0$, нужно продолжить это выражение по n в область вещественных отрицательных значений; тогда

$$L_{\text{эфф}} \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} \frac{(-1)^{-n}}{2(4\pi)^{n/2}} m^n \Gamma\left(-\frac{n}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow 4} \frac{-m^4}{32\pi^2(n-4)}.$$

С другой стороны, если используется метод расщепления точек, то мы хотим иметь возможность положить $n = 4$ с самого начала, используя в качестве регуляризатора σ . В этом случае можно воспользоваться формулой (6.88a) и мы найдем

$$L_{\text{эфф}} \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} \frac{(-1)^{-n/2} 2^{n/2-1}}{(4\pi)^{n/2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sigma^{-n/2} \xrightarrow{n \rightarrow 4} \frac{1}{8\pi^2 \sigma^2}.$$

Заметим, что в безмассовом случае расходящийся член при размерной регуляризации полностью исчезает, и перенормировка не требуется. В противоположность этому при использовании метода расщепления точек зависимость от m исчезает, и $L_{\text{эфф}}$ по-прежнему расходится как σ^{-2} в безмассовом пределе. Поэтому при таком способе регуляризации необходима перенормировка.

В случае двумерного пространства-времени исследование выражения (6.41) показывает, что при $n = 2$ потенциально расходящимися в ряду де Витта — Швингера являются лишь члены с $j = 0$ и $j = 1$. Эти члены можно устранить с помощью перенормировки Λ и G в эффективном действии, как и выше.

Следует заметить, что величина $\int d^2x [-g(x)]^{1/2} R(x)$ в двумерном случае есть топологический инвариант, и ее вариация в эффективном действии не дает вклада в двумерное «уравнение Эйнштейна». Иначе говоря, двумерный тензор Эйнштейна $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ тождественно равен нулю. Но мы должны включить член, содержащий R , в эффективное действие, чтобы можно было устранить расходимости с помощью перенормировок. Перенормированный эффективный лагранжиан (ср. (6.61)) имеет вид

$$L_{\text{рен}} = -\frac{1}{8\pi} \int_0^\infty \ln(is) \frac{\partial^2}{\partial (is)^2} \left[F(x, x; is) e^{-ism^2} \right] d(is). \quad (6.89)$$

В случае полей высших спинов изложенное выше повторяется почти без изменений. Для спинорных полей эффективное действие может быть записано с помощью би-спинора G_F , определенного соотношением (3.188):

$$W_{(1/2)} = \frac{1}{2} i \operatorname{tr} [\ln (-G_F)], \quad (6.90)$$

где след теперь берется также и по спинорным индексам. Различие в знаках между (6.90) и (6.25) непосредственно следует из антикоммутативности спинорных полей в противоположность коммутативности для скалярного поля. Случай электромагнитного поля усложняется из-за наличия полей д'юков (разд. 2.8). Методом интегрирования по траекториям находим

$$W_{EM} = -\frac{1}{2} i \operatorname{tr} [\ln (D_F)] + W_{\text{дух}}, \quad (6.91)$$

где D_F определено соотношением (3.187), а $W_{\text{дух}}$ равно умноженному на -2 эффективному действию для скалярного поля с минимальной связью (множитель -2 возникает из-за того, что имеются два антикоммутирующих скалярных поля д'юков).

Для расчета эффективного действия (6.90), (6.91) в терминах разложений де Витта — Швингера необходимы соответствующие коэффициенты a_i . Они были найдены де Виттом [153] и Кристенсеном [114], которые также подробно рассмотрели перенормировку эффективного действия методом раздвижки точек. (В электромагнитном случае, для того чтобы можно было воспользоваться методом де Витта — Швингера, необходимо временно ввести в лагранжиан массовый член.) Здесь мы приводим только предельные значения коэффициентных функций в совпадающих точках, которые встречаются в расходящихся членах в четырехмерном случае. Для спина $1/2$ коэффициенты в разложении G_F в (3.188) и (6.90) представляют собой следующие матрицы:

$$\begin{aligned} a_0(x) &= 1, \\ a_1(x) &= -\frac{1}{12} R(x) 1, \\ a_2(x) &= \left(\frac{1}{288} R^2 + \frac{1}{120} \square R - \frac{1}{180} R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \frac{1}{180} R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} \right) 1 + \\ &\quad + \frac{1}{48} \Sigma_{\mu\nu} \Sigma_{\rho\sigma} R^{\mu\nu\xi\lambda} R^{\rho\sigma}_{\xi\lambda}, \end{aligned} \quad (6.92)$$

где 1 — единичная матрица, а

$$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] = V_\mu^\alpha V_\nu^\beta \Sigma_{\alpha\beta}$$

(γ^μ — зависящие от координат матрицы Дирака для искривленного пространства-времени, введенные на с. 93, $\Sigma_{\alpha\beta}$ дается

формулой (3.166)). Для последующих применений мы приведем выражения для следов по спинорным индексам в (6.92):

$$\text{tr } a_0(x) = \text{tr } 1 = \delta,$$

$$\text{tr } a_1(x) = -\frac{1}{12} \delta R(x),$$

$$\text{tr } a_2(x) = \frac{1}{720} \delta \left[\frac{5}{2} R^2 + 6 \square R - \frac{7}{2} R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} - 4R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \right], \quad (6.93)$$

где δ — число компонент спиноров (т. е. размерность гамма-матриц). Коэффициенты в разложении $D_{F\mu\nu}$ в (3.187) и (6.91) являются тензорами, которые в фейнмановской калибровке $\xi = 1$ имеют вид

$$a_{0\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x),$$

$$a_{1\mu\nu}(x) = \frac{1}{6} R g_{\mu\nu} - R_{\mu\nu},$$

$$a_{2\mu\nu}(x) = -\frac{1}{6} R R_{\mu\nu} + \frac{1}{6} \square R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} R_{\mu\rho} R_{\nu}^{\rho} - \frac{1}{12} R^{\lambda\sigma\rho}{}_{\mu} R_{\lambda\sigma\rho\nu} + \\ + \left(\frac{1}{72} R^2 - \frac{1}{30} \square R - \frac{1}{180} R^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma} + \frac{1}{180} R^{\rho\sigma\lambda\omega} R_{\rho\sigma\lambda\omega} \right) g_{\mu\nu}. \quad (6.94)$$

В заключение этого раздела, носящего несколько технический характер, сформулируем основные выводы. Метод перенормировки позволяет ввести действие для связанной системы, состоящей из гравитационного поля и квантованных материальных полей, в форме

$$S = S_g + W$$

и расходящиеся члены в W включить в достаточно общее выражение для S_g , так что все бесконечности оказываются поглощенными перенормированными константами связи. Таким образом,

$$S = (S_g)_{\text{рен}} + W_{\text{рен}},$$

где $(S_g)_{\text{рен}}$ содержит перенормированные физические константы, а $W_{\text{рен}}$ теперь конечно. Подстановка S в (6.10) приводит к полуклассическому уравнению (в четырехмерном случае)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + a^{(1)} H_{\mu\nu} + b^{(2)} H_{\mu\nu} = \\ = -8\pi G \frac{\langle \text{out}, 0 | T_{\mu\nu} | 0, \text{in} \rangle_{\text{рен}}}{\langle \text{out}, 0 | 0, \text{in} \rangle}, \quad (6.95)$$

где правая часть теперь конечна, а постоянные Λ , a , b и G должны быть определены из эксперимента.

При выполнении перенормировок не потребовалось явного использования состояний $|0, \text{out}\rangle$ или $|0, \text{in}\rangle$. В частности, не возникло необходимости в предположении, что существуют

асимптотические in- и out-области, в которых понятие вакуума возникает естественно, либо вводится с помощью дополнительных физических соображений; вакуумные in- и out-состояния появляются здесь чисто формально. Возникновение величины $\langle \text{out}, 0 | T_{\mu\nu} | 0, \text{in} \rangle$, а не какой-либо другой комбинации вакуумных состояний, связано с граничными условиями, заложенными в представлении де Витта — Швингера для фейнмановского пропагатора G_F , выполнение которых обеспечивается введением множителя $i\epsilon$ (см. с. 84). В ряде случаев нас более интересует величина $\langle \text{in}, 0 | T_{\mu\nu} | 0, \text{in} \rangle$ (или, возможно, $\langle \text{out}, 0 | T_{\mu\nu} | 0, \text{out} \rangle$). Эффективное действие, которое приводит к таким вакуумным математическим ожиданиям, можно получить, используя (6.25) с G_F , записанным в терминах соответствующих вакуумных ожиданий (например, для $\langle \text{in}, 0 | T_{\mu\nu} | 0, \text{in} \rangle$ следует взять $G_F(x, x') = -i \langle \text{in}, 0 | T(\phi(x)\phi(x')) | 0, \text{in} \rangle$). К счастью, нам не придется обсуждать перенормировки для каждого случая отдельно. Расходимость обусловлена поведением пропагатора на малых расстояниях (при больших импульсах) (см. разд. 3.6), которое не зависит от глобальных эффектов и выбора квантового состояния. Поэтому следует ожидать, что расходимости для всех трех форм $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ будут одинаковыми [156]. Это можно видеть, если с помощью (3.45), (3.46) выразить $|0, \text{out}\rangle$ через многочастичные in-состояния. Величину $\langle 1_{i_1}, 1_{i_2}, 1_{i_3}, \dots, 1_{i_k}, \text{in} | T_{\mu\nu} | 0, \text{in} \rangle$ можно найти, разлагая $T_{\mu\nu}$ по произведениям операторов рождения и уничтожения, действующим на $|0, \text{in}\rangle$. После проведения этих выкладок приходим к результату

$$\langle \text{in}, 0 | T_{\mu\nu} | 0, \text{in} \rangle = \frac{\langle \text{out}, 0 | T_{\mu\nu} | 0, \text{in} \rangle}{\langle \text{out}, 0 | 0, \text{in} \rangle} - i \sum_{ij} \Lambda_{ij} T_{\mu\nu}(u_{\text{in}, i}^*, u_{\text{in}, j}^*), \quad (6.96)$$

где $u_{\text{in}, i}$ — моды для in-области, а обозначения, использованные для записи последнего члена, объяснены на с. 25. Аналогичная формула имеет место для $\langle \text{out}, 0 | T_{\mu\nu} | 0, \text{out} \rangle$ с заменой Λ_{ij} на V_{ij} из (3.46) и заменой u_{in} на u_{out} . Последний член в (6.96) конечен. Следовательно, имеющиеся в $\langle \text{in}, 0 | T_{\mu\nu} | 0, \text{in} \rangle$ расходимости являются теми же самыми, что и в $\langle \text{out}, 0 | T_{\mu\nu} | 0, \text{in} \rangle / \langle \text{out}, 0 | 0, \text{in} \rangle$.

6.3. Конформные аномалии и безмассовый случай

Особый интерес вызывают теории поля, в которых классическое действие S инвариантно относительно конформных преобразований (разд. 3.1)

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu}(x). \quad (6.97)$$

Из определения вариационной производной имеем

$$S[\bar{g}_{\mu\nu}] = S[g_{\mu\nu}] + \int \frac{\delta S[\bar{g}_{\mu\nu}]}{\delta \bar{g}^{\rho\sigma}(x)} \delta \bar{g}^{\rho\sigma}(x) d^n x, \quad (6.98)$$

откуда, используя $\delta \bar{g}^{\mu\nu}(x) = -2\bar{g}^{\mu\nu}(x)\Omega^{-1}(x)\delta\Omega(x)$ и (6.12), находим

$$S[\bar{g}_{\mu\nu}] = S[g_{\mu\nu}] - \int [-\bar{g}(x)]^{1/2} T_{\rho}^{\rho}[\bar{g}_{\mu\nu}(x)] \Omega^{-1}(x) \delta\Omega(x) d^n x. \quad (6.99)$$

Из этого уравнения немедленно получаем

$$T_{\rho}^{\rho}[g_{\mu\nu}(x)] = - \frac{\Omega(x)}{[-g(x)]^{1/2}} \frac{\delta S[\bar{g}_{\mu\nu}]}{\delta \Omega(x)} \Big|_{\Omega=1}, \quad (6.100)$$

откуда ясно, что если классическое действие инвариантно относительно конформных преобразований (6.97), то след классического тензора энергии-импульса равен нулю. Это нетрудно проверить в явном виде, используя формулы (3.190), (3.191) и (3.193) для безмассового скалярного поля с $\xi = \xi(n)$, безмассового поля со спином $1/2$ и электромагнитного поля в четырехмерном пространстве соответственно. Поскольку конформные преобразования представляют собой преобразования длин в каждой пространственно-временной точке x , наличие массы, а следовательно, шкалы расстояний в теории всегда приводит к нарушению конформной инвариантности. Таким образом, мы приходим к проблеме безмассового предела при проведении процедур регуляризации и перенормировок, использованных в предыдущем разделе. При этом мы сталкиваемся с некоторыми тонкостями.

Несмотря на то что все члены высокого порядка ($j > 2$) в разложении де Витта – Швингера для эффективного лагранжиана (6.42) содержат инфракрасные расходимости при $m \rightarrow 0$ в случае $n = 4$, мы по-прежнему можем использовать это разложение для членов, содержащих ультрафиолетовые расходимости $j = 0, 1$ и 2 в четырехмерном случае. В членах с $j = 0$ и 1 можно сразу положить $m = 0$, поскольку они содержат положительные степени разности $n - 4$. Следовательно, эти члены обращаются в нуль. Таким образом, единственное потенциально расходящееся в ультрафиолетовой области слагаемое возникает при $j = 2$:

$$\frac{1}{2} (4\pi)^{-n/2} \left(\frac{m}{\mu}\right)^{n-4} a_2(x) \Gamma(2 - n/2); \quad (6.101)$$

оно требует тщательного исследования.

Подставляя для $a_2(x)$ при $\xi = \xi(n)$ выражение из (6.48), после перегруппировки членов перепишем расходящееся сла-

гаемое эффективного действия, связанное с (6.101), в следующем виде:

$$W_{\text{расх}} = \frac{1}{2} (4\pi)^{-n/2} \left(\frac{m}{\mu}\right)^{n-4} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) \int d^n x [-g(x)]^{1/2} a_2(x) = \quad (6.102)$$

$$= \frac{1}{2} (4\pi)^{-n/2} \left(\frac{m}{\mu}\right)^{n-4} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) \int d^n(x) [-g(x)]^{1/2} \times \\ \times [\alpha F(x) + \beta G(x)] + O(n-4), \quad (6.103)$$

где

$$F = R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} - 2R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} R^2, \quad (6.104)$$

$$G = R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} - 4R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + R^2, \quad (6.105)$$

причем коэффициенты равны

$$\alpha = 1/120, \quad \beta = -1/360. \quad (6.106)$$

При получении (6.103) мы опустили члены $\square R$ и R^2 в $a_2(x)$: первый потому, что он представляет собой полную производную и, следовательно, не дает вклада в действие, а второй потому, что коэффициент перед ним пропорционален $(n-4)^2$ для случая конформной связи, когда $\xi = \xi(n) = 1/4(n-2)/(n-1)$. В пределе $n \rightarrow 4$ этот коэффициент подавляет особенность $(n-4)^{-1}$, которую имеет Γ -функция в (6.43), в результате чего данный член обращается в нуль.

Разбиение функции a_2 на F и G связано с тем, что в четырехмерном случае (и только в этом случае) F представляет собой квадрат тензора Вейля $C_{\alpha\beta\gamma\delta} C^{\alpha\beta\gamma\delta}$. С другой стороны, интеграл $\int (-g)^{1/2} G d^4 x$ есть топологический инвариант (см. (6.56)). Обе эти величины инвариантны относительно конформных преобразований. Отсюда следует, что при $n=4$ в безмассовом пределе теории с конформной связью $W_{\text{расх}}$ инвариантно относительно конформных преобразований.

Однако мы не должны снимать регуляризацию и переходить к пределу $n=4$ до того, как будут вычислены интересующие нас физические величины, а вне точки $n=4$ величина $W_{\text{расх}}$ не является конформно-инвариантной (в противоположность W). Мы увидим, что это нарушение конформной инвариантности отражается на физических величинах даже после того, как в конце вычисления положено $n=4$.

Чтобы убедиться в этом, воспользуемся тождествами [185]

$$\frac{2}{(-g)^{1/2}} g^{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int (-g)^{1/2} F d^n x = -(n-4) \left(F - \frac{2}{3} \square R \right), \quad (6.107)$$

$$\frac{2}{(-g)^{1/2}} g^{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int (-g)^{1/2} G d^n x = -(n-4) G, \quad (6.108)$$

которые позволяют сразу получить вклад $W_{\text{расх}}$ в след тензора энергии-импульса

$$\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_{\text{расх}} = \frac{2}{(-g)^{1/2}} g^{\mu\nu} \frac{\delta W_{\text{расх}}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} (4\pi)^{-n/2} \left(\frac{m}{\mu}\right)^{n-4} (4-n) \times \\ \times \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) \left[\alpha \left(F - \frac{2}{3} \square R\right) + \beta G \right] + O(n-4). \quad (6.109)$$

Из (6.43) видно, что множители $(n-4)$, возникающие из (6.107) и (6.108), уничтожают расходимость $(n-4)^{-1}$ от $\Gamma(2 - n/2)$, приводя в пределе $n \rightarrow 4$ к выражению

$$\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_{\text{расх}} = (1/16\pi^2) \left[\alpha \left(F - \frac{2}{3} \square R\right) + \beta G \right]. \quad (6.110)$$

Поскольку этот результат не зависит от отношения m/μ , которое было удержано в (6.109) для обрезания в инфракрасной области, в окончательном выражении (6.110) мы можем положить $m = 0$. Заметим, что локальность величины $W_{\text{расх}}$ и независимость от выбора состояния влечет за собой такие же свойства и для величины $\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_{\text{расх}}$. Последняя также зависит только от геометрических величин, характеризующих пространство-время в точке x .

Так как действие W в безмассовом пределе для случая конформной связи является конформно-инвариантным, среднее значение следа *полного* тензора энергии-импульса равно нулю:

$$\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle|_{m=0, \xi=1/\mu} = - \frac{\Omega(x) \delta W[\bar{g}_{\mu\nu}]}{[-g(x)]^{1/2} \delta \Omega(x)} \Big|_{m=0, \xi=1/\mu, \Omega=1} = 0. \quad (6.111)$$

Следовательно, если расходящаяся часть приобрела ненулевой след (6.110), то конечный перенормированный остаток $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}}$ также должен иметь ненулевой след — выражение (6.110) со знаком минус:

$$\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_{\text{рен}} = - (1/16\pi^2) \left[\alpha \left(F - \frac{2}{3} \square R\right) + \beta G \right] = \quad (6.112)$$

$$= - a_2/16\pi^2 = \quad (6.113)$$

$$= - \frac{1}{2880\pi^2} [R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} - R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - \square R] = \quad (6.114)$$

$$= - \frac{1}{2880\pi^2} \left[C_{\alpha\beta\gamma\delta} C^{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - \frac{1}{3} R^2 - \square R \right]. \quad (6.115)$$

След (6.112) — (6.115) появился в теории, несмотря на то что классический тензор энергии-импульса является бесследовым, и обе величины W и $W_{\text{расх}}$ остаются конформно-инвариантными в четырехмерном случае. Ненулевой след появился вследствие неконформной природы $W_{\text{расх}}$ (в отличие от W) вне точки $n = 4$, которая оставляет свой отпечаток и при $n = 4$ из-за рас-

ходимости $W_{\text{расх}}$ типа $(n-4)^{-1}$. Этот факт известен как конформная аномалия, или аномалия следа. Аналогичное нарушение симметрии, получившее название аксиально-векторной аномалии, было ранее обнаружено [4] в квантовой электродинамике.

Существование аномального члена $\square R$ в выражении для следа было первоначально найдено Каппером и Даффом [98, 99]. За этим последовало указание [147] на возможное существование других членов, и в ряде более поздних работ (см. библиографию) были установлены коэффициенты при этих членах. Некоторые из ранних работ содержали ошибки и противоречия (см. [72]). Но теперь известно, что все схемы регуляризации предсказывают одинаковую конформную аномалию для скалярного поля.

Появление аномального следа тесно связано со скейлинговыми свойствами эффективного действия и, следовательно, с ренормгруппой (см. гл. 9). Чтобы исследовать эту связь подробнее, обратимся к методу ξ -регуляризации. С помощью рассуждений, аналогичных приведенным на с. 88, найдем, что при конформном преобразовании (6.97) фейнмановский пропагатор безмассового конформно-связанного скалярного поля преобразуется к выражению $\Omega^{-(n-2)/2}(x) G_F(x, x') \Omega^{-(n-2)/2}(x')$. Из соотношения (6.26) следует, что $|x\rangle$ преобразуется в $\Omega^{-n/2}(x)|x\rangle$, поэтому видно, что оператор G_F , определенный формулой (6.27), переходит в $\Omega^2 G_F$. Применяя этот результат к (6.70), получаем

$$W[\bar{g}_{\mu\nu}] = -\frac{1}{2} i \text{tr} \{ \ln [-(\mu\Omega)^2 C_F] \}, \quad (6.116)$$

где Ω появляется только в комбинации $\mu\Omega$. Поэтому, воспользовавшись формулой (6.100) для W , можем написать

$$\langle T_{\mu}^{\mu}(x) \rangle = -\frac{\Omega(x)}{(-g)^{1/2}} \frac{\delta W[\bar{g}_{\mu\nu}]}{\delta \Omega(x)} \Big|_{\Omega=1} = -\frac{\mu(x)}{(-g)^{1/2}} \frac{\delta W[\mu]}{\delta \mu(x)} \Big|_{\mu=1}, \quad (6.117)$$

где величина μ временно рассматривается как функция x , а W — как функционал от μ . Учитывая это, мы можем теперь применить соотношения (6.72) и (6.77), чтобы записать безмассовый предел W в виде

$$W = -\frac{1}{2} i \zeta'(0) + (1/32\pi^2) \int d^4x [-g(x)]^{1/2} a_2(x) \ln[\mu^2(x)], \quad (6.118)$$

что после подстановки в (6.117) дает

$$\langle T_{\mu}^{\mu}(x) \rangle_{\text{рен}} = -a_2(x)/16\pi^2. \quad (6.119)$$

Очевидно, аналитическое продолжение по ν , используемое в методе ξ -функции, не только делает W конечным, но и приводит к нарушению конформной инвариантности, давая отличный от

нуля след (6.119). Это выражение для следа в точности соответствует (6.113), полученному с помощью размерной регуляризации.

Нетрудно рассчитать аномалию следа и в пространстве-времени с числом измерений, отличным от 4 [114]. Прежде всего заметим, что при нечетном n эффективный лагранжиан $L_{\text{эфф}}$, определенный соотношением (6.42), является конечным. Отсюда можно сделать вывод, что в пространстве-времени нечетной размерности нет конформных аномалий.

Для четных n , равных n_0 , расходящимися в ультрафиолетовой области являются только первые $1 + n_0/2$ членов в (6.42), для которых соответствующие Γ -функции имеют полюсы при $n = n_0$. Из этих членов все, кроме $a_{n_0/2}$, обращаются в нуль в точке $n = n_0$ при $m \rightarrow 0$. Последний член содержит множитель m^{n-n_0} и не обращается в нуль. Этот член приводит к аномальному следу

$$\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_{\text{рен}} = -a_{n_0/2}/(4\pi)^{n_0/2}. \quad (6.120)$$

Такой результат подтверждается при использовании ξ -регуляризации.

Представляет интерес случай $n_0 = 2$, для которого

$$\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_{\text{рен}} = -a_1/4\pi = -R/24\pi, \quad (6.121)$$

где мы использовали (6.47) при $\xi = 0$ (что соответствует конформному характеру связи для двух измерений).

Возникает вопрос: нельзя ли избавиться от аномальных следов, добавляя соответствующий контрчлен в эффективный лагранжиан? Оказывается, что локальных геометрических величин, варьирование которых в эффективном действии давало бы вклад в $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}}$, след которого уничтожал бы аномалию полностью, не существует. Однако конформные аномалии можно устранить в динамической теории, допускающей действие более общего вида [67, 210]. Можно также устранить член $\square R$ из (6.114) или (6.115) с помощью тождества

$$\frac{2}{(-g)^{1/2}} g^{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int (-g)^{1/2} R^2 d^4x = -12 \square R \quad (6.122)$$

(см. (6.53)). Добавлением члена R^2 к $L_{\text{эфф}}$ (напомним, что в соответствии с (6.104)–(6.106) величина $\alpha F + \beta G$ не содержит члена R^2) коэффициент при $\square R$ в выражении для аномального следа может быть сделан равным любой наперед заданной величине, в частности равным нулю. Конечно, добавление члена R^2 в $L_{\text{эфф}}$ означает, что $W_{\text{эфф}}$ уже не будет инвариантным относительно конформных преобразований. Разумно это или нет, можно выяснить только с помощью эксперимента. По-

видимому, не существует убедительных теоретических причин, по которым конформную симметрию динамики следует искусственно нарушать, поэтому в дальнейшем мы будем оставлять в выражениях для аномальных следов член $\square R$ (см., однако, [295]).

Обратимся теперь к аномалиям следов для полей высших спинов. До тех пор пока мы требуем, чтобы величина W была конформно-инвариантной, аномальный след будет иметь вид (6.112) с некоторыми значениями α и β . Но, если W не является конформно-инвариантным (например, скалярное поле при $\xi \neq \xi(n)$), аномальный след может содержать добавочные члены вида $\square R$ и R^2 . Он будет, конечно, содержать также обычные, т. е. неаномальные, компоненты, зависящие от квантового состояния поля. Эти величины, вообще говоря, уже не будут иметь геометрической природы и могут быть даже нелокальными (см. явные примеры в гл. 7). Аномальная же часть следа не зависит от состояния, локальна и имеет геометрический характер.

Как было отмечено выше, появление конформных аномалий с точки зрения размерной регуляризации можно понять как следствие того, что действие $W_{\text{расх}}$ конформно-инвариантно лишь в четырехмерном случае, хотя W конформно-инвариантно при всех n . При аналитическом продолжении по размерности пространства-времени к n нарушение конформной инвариантности вдали от $n = 4$ сказывается на значениях $\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_{\text{расх}}$ и, следовательно, $\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_{\text{рен}}$ при $n = 4$. Можно было бы спорить по поводу теорий, в которых не только $W_{\text{расх}}$, но и само W является конформно-инвариантным лишь в пространстве-времени некоторой фиксированной размерности. Двумя примерами таких теорий могут служить случай скалярного поля с ξ , фиксированным независимо от n , и случай электромагнитного поля, для которого конформная инвариантность имеется лишь в четырехмерном пространстве. В этих случаях размерная регуляризация дает иные результаты, нежели другие схемы регуляризации. Но различие возникает лишь в коэффициенте при $\square R$, который, как мы видели, можно изменить добавлением контрчлена R^2 в $L_{\text{эфф}}$ и, следовательно, нужно определять экспериментально.

Обобщение результата (6.119) на поля произвольного спина было дано Кристенсеном и Даффом [115]:

$$\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_{\text{рен}} = - \frac{(-1)^{2A+2B}}{16\pi^2} \text{tr } a_2(A, B), \quad (6.123)$$

где индексы (A, B) характеризуют представление группы Лоренца, по которому преобразуется рассматриваемое поле (см. (3.164)). Этот след можно записать с помощью четырех

параметров в виде

$$\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_{\text{рен}} = (2880\pi^2)^{-1} \left\{ a C_{\alpha\beta\gamma\delta} C^{\alpha\beta\gamma\delta} + b \left(R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - \frac{1}{3} R^2 \right) + c \square R + d R^2 \right\}. \quad (6.124)$$

Коэффициенты a , b , c и d могут быть выражены в виде полиномов от A и B . Общие формулы даны в работе [117] для некоторых значений высших спинов. В табл. 1 приведены некоторые из наиболее важных результатов для полей спина ≤ 2 .

Таблица 1. Коэффициенты в выражении для аномального следа (6.124) для полей с различным спином. В случае спина $1/2$ приведены результаты для двухкомпонентных спиноров; для четырехкомпонентных спиноров коэффициенты следует умножить на 2. Крестики показывают, что условия согласованности для полей высших спинов требуют исчезновения соответствующего геометрического объекта в выражении для аномального следа [118]

| (A, B) | a | b | c | d |
|------------|-------|-------|---------|----------------------------|
| (0,0) | -1 | -1 | (6-30ξ) | -90 (ξ - 1/6) ² |
| (1/2, 0) | -7/4 | -11/2 | 3 | 0 |
| (1/2, 1/2) | 11 | -64 | -6 | -5 |
| (1,0) | -33 | 27 | 12 | -5/2 |
| (1, 1/2) | 291/4 | × | × | 61/8 |
| (1,1) | -189 | × | × | -747/4 |

Отметим, что табл. 1 дает только аномальные вклады. Если поле не является конформно-инвариантным, то, как отмечалось выше, будут также дополнительные неаномальные вклады. В частности, в скалярном случае при $\xi \neq 1/6$ имеется неаномальный вклад

$$6 \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \{ \langle \phi_{;\mu} \phi^{;\mu} \rangle + \xi R \langle \phi^2 \rangle \}, \quad (6.125)$$

зависящий от выбора квантового состояния. Результаты для скалярного поля, поля спина $1/2$, преобразующегося по представлению $(1/2, 0)$ и поля спина 1, преобразующегося по представлению $(1/2, 1/2)$, могут быть получены из формул (6.48), (6.93) и (6.94) соответственно.

В общем случае физические поля высших спинов могут соответствовать не какому-то одному представлению (A, B) группы Лоренца, но линейной комбинации нескольких таких представлений. Например, электромагнитное поле содержит вклады скалярных дубов, поэтому, чтобы получить электромагнитную

аномалию, нужно вычесть из аномалии для поля $(1/2, 1/2)$ удвоенную аномалию для поля $(0, 0)$. В табл. 2 приведены различные физические комбинации для безмассовых полей со спинами ≤ 2 . Эти результаты были получены с помощью регуляризации методом ξ -функции. Как отмечалось, применение размерной регуляризации изменяет коэффициент при $\square R$ в случае электромагнитного поля; Браун и Кассиди [64] получили значение $c = 12$.

Таблица 2. Коэффициенты аномалий следов для физических безмассовых полей спина ≤ 2 . В случаях спинов 1 и 2 обозначение $(0, 0)$ соответствует скалярному полю с минимальной связью ($\xi = 0$). Крестики имеют тот же смысл, что и в табл. 1

| Спин | (A, B) | a | b | c | d |
|------|---------------------------------|---------|----------|---------------|--------------------|
| 0 | $(0, 0)$ | -1 | -1 | $(6 - 30\xi)$ | $-90(\xi - 1/6)^2$ |
| 1/2 | $(1/2, 0)$ | $-7/4$ | $-11/2$ | 3 | 0 |
| 1 | $(1/2, 1/2) - 2(0, 0)$ | 13 | -62 | -18 | 0 |
| 3/2 | $(1, 1/2) - 2(1/2, 0)$ | $233/4$ | \times | \times | $61/8$ |
| 2 | $(1, 1) + (0, 0) - 2(1/2, 1/2)$ | -212 | \times | \times | $-717/4$ |

Существует полезное условие согласованности между коэффициентами a , b , c и d , возникающее при использовании размерной регуляризации в теории, которая конформно-инвариантна в n измерениях [185]. Сравнение (6.112) и (6.124) показывает, что

$$a = -180(\alpha + \beta), \quad b = 360\beta, \quad c = 120\alpha, \quad d = 0, \quad (6.126)$$

откуда получаем условия

$$2a + b + 3c = 0, \quad d = 0. \quad (6.127)$$

Остается найти лишь два из четырех коэффициентов a , b , c и d .

Аномалии следов особенно важны в частном случае конформно-плоского фоновое пространства-времени. Если квантованное поле также конформно-инвариантно, то мы имеем конформно-тривиальную ситуацию (разд. 3.7). В этом случае оказывается, что аномальный след определяет полный тензор энергии-импульса в заданном состоянии квантового поля [63, 78, 130, 131].

Чтобы убедиться в этом, используем (6.99) с заменой S на $W_{\text{рен}}$:

$$W_{\text{рен}}[-\bar{g}_{\mu\nu}] = W_{\text{рен}}[g_{\mu\nu}] - \int [-\bar{g}(x)]^{1/2} \times \\ \times \langle T_{\rho}{}^{\rho}[\bar{g}_{\mu\nu}(x)] \rangle_{\text{рен}} \Omega^{-1}(x) \delta\Omega(x) d^n x. \quad (6.128)$$

Далее, используя (6.13), а также соотношение

$$\bar{g}^{\nu\sigma} \frac{\delta}{\delta \bar{g}^{\mu\sigma}} = g^{\nu\sigma} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\sigma}},$$

получаем

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu}^{\nu} [\bar{g}_{\kappa\lambda}(x)] \rangle_{\text{рен}} &= \left(\frac{g}{\bar{g}} \right)^{1/2} \langle T_{\mu}^{\nu} [g_{\kappa\lambda}(x)] \rangle_{\text{рен}} - \\ &- \frac{2}{[-\bar{g}(x)]^{1/2}} \bar{g}^{\nu\sigma}(x) \frac{\delta}{\delta \bar{g}^{\mu\sigma}} \int [-\bar{g}(x')]^{1/2} \langle T_{\rho}^{\rho} [\bar{g}_{\kappa\lambda}(x')] \rangle_{\text{рен}} \times \\ &\times \Omega^{-1}(x') \delta\Omega(x') d^n x'. \end{aligned} \quad (6.129)$$

Для конформно-инвариантных теорий поля след под знаком интеграла в правой части этого равенства чисто аномальный; он, как мы знаем, локален и не зависит от квантового состояния. Следовательно, независимо от выбора состояния в левой части можно выполнить вариационное интегрирование [63, 157]. Или же в рамках метода размерной регуляризации можно рассуждать так. Учитывая замечания, сделанные при выводе формул (6.111) — (6.115), можно записать соотношение

$$\begin{aligned} \langle T_{\rho}^{\rho} [\bar{g}_{\kappa\lambda}(x)] \rangle_{\text{рен}} &= -\langle T_{\rho}^{\rho} [\bar{g}_{\kappa\lambda}(x)] \rangle_{\text{расх}} = \\ &= \frac{\Omega(x)}{[-\bar{g}(x)]^{1/2}} \frac{\delta W_{\text{расх}} [\bar{g}_{\kappa\lambda}]}{\delta \Omega(x)}, \end{aligned} \quad (6.130)$$

подстановка которого в (6.129) позволяет выполнить интегрирование и найти

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu}^{\nu} [\bar{g}_{\kappa\lambda}(x)] \rangle_{\text{рен}} &= \left(\frac{g}{\bar{g}} \right)^{1/2} \langle T_{\mu}^{\nu} [g_{\kappa\lambda}(x)] \rangle_{\text{рен}} - \\ &- \frac{2}{[-\bar{g}(x)]^{1/2}} \bar{g}^{\nu\sigma}(x) \frac{\delta}{\delta \bar{g}^{\mu\sigma}(x)} W_{\text{расх}} [\bar{g}_{\kappa\lambda}] + \\ &+ \frac{2}{[-\bar{g}(x)]^{1/2}} g^{\nu\sigma} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\sigma}(x)} W_{\text{расх}} [g_{\kappa\lambda}]. \end{aligned} \quad (6.131)$$

Сначала применим этот результат к двумерному случаю. Воспользовавшись (6.41) и (6.47) при $\xi = \xi(2) = 0$, а также соотношением $\Gamma(1 - n/2) = 2/(2 - n) + O(1)$, получаем

$$\begin{aligned} W_{\text{расх}} [g_{\kappa\lambda}] &= -[1/4\pi(n-2)] \int [-g(x')]^{1/2} a_1 [g_{\kappa\lambda}(x')] d^n x' = \\ &= -[1/24\pi(n-2)] \int [-g(x')]^{1/2} R(x') d^n x', \end{aligned} \quad (6.132)$$

где члены порядка $n - 2$ опущены. Подставляя (6.132) и соответствующее выражение для $\bar{g}_{\kappa\lambda}$ в (6.131), получаем

$$\langle T_{\mu}{}^{\nu} [\bar{g}_{\kappa\lambda}(x)] \rangle_{\text{рен}} = (g/\bar{g})^{1/2} \langle T_{\mu}{}^{\nu} [g_{\kappa\lambda}(x)] \rangle_{\text{рен}} + [1/12\pi(n-2)] \left[\left(\bar{R}_{\mu}{}^{\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}{}^{\nu} \bar{R} \right) - \left(R_{\mu}{}^{\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}{}^{\nu} R \right) \right], \quad (6.133)$$

что при использовании выражений (3.3) и (3.4) для $\bar{R}_{\mu}{}^{\nu}$ и \bar{R} дает

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu}{}^{\nu} [\bar{g}_{\kappa\lambda}(x)] \rangle_{\text{рен}} &= (g/\bar{g})^{1/2} \langle T_{\mu}{}^{\nu} [g_{\kappa\lambda}(x)] \rangle_{\text{рен}} + \\ &+ (1/12\pi) \left[(\Omega^{-3} \Omega_{; \rho\mu} - 2\Omega^{-4} \Omega_{; \rho} \Omega_{; \mu}) g^{\rho\nu} + \delta_{\mu}{}^{\nu} g^{\rho\sigma} \times \right. \\ &\times \left. \left(\frac{3}{2} \Omega^{-4} \Omega_{; \rho} \Omega_{; \sigma} - \Omega^{-3} \Omega_{; \rho\sigma} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.134)$$

С помощью (6.93) нетрудно показать, что (6.132) и, следовательно, (6.134) выполняются также для двухкомпонентных спинорных полей со спином $1/2$.

Любое двумерное пространство-время является конформно-плоским: $g_{\mu\nu} = C(x) \eta_{\mu\nu}$. Поэтому соотношение (6.134) с $g_{\kappa\lambda} = \eta_{\kappa\lambda}$ и $\Omega = C^{1/2}$ позволяет записать среднее значение тензора энергии-импульса в любом двумерном искривленном пространстве-времени через соответствующее значение в плоском пространстве. Особенно простую форму этот результат имеет в изотропных координатах (3.9)

$$ds^2 = C(u, v) du dv, \quad (6.135)$$

для которых (6.134) дает [131]

$$\langle T_{\mu}{}^{\nu} [g_{\kappa\lambda}(x)] \rangle_{\text{рен}} = (-g)^{-1/2} \langle T_{\mu}{}^{\nu} [\eta_{\kappa\lambda}(x)] \rangle_{\text{рен}} + \theta_{\mu}{}^{\nu} - (1/48\pi) R \delta_{\mu}{}^{\nu}, \quad (6.136)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_{uu} &= -(1/12\pi) C^{1/2} \partial_u^2 C^{-1/2}, \\ \theta_{vv} &= -(1/12\pi) C^{1/2} \partial_v^2 C^{-1/2}, \\ \theta_{uv} &= -\theta_{vu} = 0. \end{aligned} \quad (6.137)$$

Если состояние, в котором вычисляется среднее значение в плоском пространстве-времени, является вакуумным, то состояние, фигурирующее в соответствующем среднем в искривленном пространстве, представляет собой конформный вакуум. Как отмечалось в разд. 5.5, ответ на вопрос, будет ли вакуум в плоском пространстве обычным вакуумом Минковского, зависит от того, является ли искривленное пространство-время конформным всему пространству Минковского или же только его части. Если оно конформно всему пространству Минковского, то это действительно обычный вакуум и первый член в правой

части (6.136) обращается в нуль. В противном случае это слагаемое дает ненулевой вклад. Ниже мы остановимся на этом подробнее.

Обратимся теперь к четырехмерному конформно-тривиальному случаю. Из формулы (6.103) находим

$$W_{\text{расх}} = -[1/16\pi^2(n-4)] \int d^n x [-g(x)]^{1/2} [\alpha F(x) + \beta G(x)] + O(1). \quad (6.138)$$

Подставляя (6.138) в (6.131) с заменой $\bar{g}_{\kappa\lambda}$ на $g_{\kappa\lambda}$ и $g_{\kappa\lambda}$ на $\tilde{g}_{\kappa\lambda}$ — метрику плоского пространства (например, $\eta_{\kappa\lambda}$) и выполняя функциональное дифференцирование [64, 72], получаем

$$\begin{aligned} \langle T_\mu{}^\nu [g_{\kappa\lambda}] \rangle_{\text{рен}} &= (\tilde{g}/g)^{1/2} \langle T_\mu{}^\nu [\tilde{g}_{\kappa\lambda}] \rangle_{\text{рен}} - \\ &- (1/16\pi^2) \{ 1/9 \alpha^{(1)} H_\mu{}^\nu + 2\beta^{(3)} H_\mu{}^\nu \}, \end{aligned} \quad (6.139)$$

где величина ${}^{(1)}H_{\mu\nu}$ определяется формулой (6.53) и

$$\begin{aligned} {}^{(3)}H_{\mu\nu} &\equiv 1/12 R^2 g_{\mu\nu} - R^{\sigma\rho} R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_\mu{}^\rho R_{\rho\nu} - 2/3 R R_{\mu\nu} - \\ &- 1/2 R_{\rho\sigma} R^{\sigma\rho} g_{\mu\nu} + 1/4 R^2 g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (6.140)$$

В скалярном случае α и β определены (6.106) и

$$\begin{aligned} \langle T_\mu{}^\nu [g_{\kappa\lambda}] \rangle_{\text{рен}} &= (\tilde{g}/g)^{1/2} \langle T_\mu{}^\nu [\tilde{g}_{\kappa\lambda}] \rangle_{\text{рен}} - \\ &- (1/2880\pi^2) [1/6 {}^{(1)}H_\mu{}^\nu - {}^{(3)}H_\mu{}^\nu]. \end{aligned} \quad (6.141)$$

Для других конформно-инвариантных теорий α и β могут быть выражены через коэффициенты аномалий a , b , c и d в (6.124) с помощью (6.126).

Соотношение (6.139) было получено менее формальным способом в работе Банча и Дэвиса [78]. Учитывая, что использованный ими метод более тесно связан с физикой рассматриваемых явлений, мы опишем здесь кратко основные этапы этого подхода.

Прежде всего заметим, что, поскольку среднее значение $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}}$ получено из эффективного действия $W_{\text{рен}}$, оно автоматически удовлетворяет ковариантному условию сохранения

$$\langle T_\mu{}^\nu \rangle_{\text{рен}; \nu} = 0. \quad (6.142)$$

Далее учтем, что если квантовое состояние представляет собой конформный вакуум или любое из соответствующих возбужденных состояний, то величина $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}}$ должна быть *локальным* тензором, т. е. зависеть только от геометрии в точке x . Это следует из локального характера величины G_F (которую можно построить с помощью простого конформного преобразования из пространства Минковского, где эта величина явно

локальна; см., например, (3.154)). Более того, дифференцирование G_F , используемое при получении $\langle T_{\mu}^{\nu} \rangle_{\text{рен}}$, и процедура перенормировки также являются локальными (и ковариантными) операциями.

Имея в виду два этих ограничения мы попытаемся построить в наиболее общем виде локальный сохраняющийся тензор требуемой размерности (длина)⁻⁴. Из соотношения

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\gamma} R_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} R_{\beta\gamma} - g_{\beta\gamma} R_{\alpha\delta} + g_{\beta\delta} R_{\alpha\gamma}) + \\ + \frac{1}{6} R (g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta}) + C_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (6.143)$$

ясно, что в конформно-плоском пространстве, в котором $C_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$, тензор Римана полностью определяется тензором Риччи и его свертками. Учитывая далее вырождение, связанное с конформной симметрией [137], найдем следующие шесть независимых геометрических величин требуемой размерности:

$$R_{\mu}^{\alpha} R_{\alpha\nu}, \quad R R_{\mu\nu}, \quad R_{;\mu\nu}, \quad R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} g_{\mu\nu}, \quad R^2 g_{\mu\nu}, \quad g_{\mu\nu} \square R. \quad (6.144)$$

Нам необходимы ковариантно сохраняющиеся линейные комбинации этих тензоров. Два локально сохраняющихся тензора $^{(1)}H_{\mu\nu}$ и $^{(2)}H_{\mu\nu}$ уже известны; но в конформно-плоских пространствах они не являются независимыми:

$$^{(2)}H_{\mu\nu} = \frac{1}{3} ^{(1)}H_{\mu\nu}. \quad (6.145)$$

С помощью (6.142) легко проверить, что единственным другим локальным сохраняющимся тензором является $^{(3)}H_{\mu\nu}$, определенный соотношением (6.140). Хотя этот тензор имеет чисто геометрический характер, он сохраняется лишь в конформно-плоских пространствах, т. е. не может быть получен варьированием какой-либо геометрической величины в действии и не является пределом тензора, сохраняющегося в неконформно-плоском пространстве [244].

Помимо этих двух геометрических тензоров возможен еще локальный, но не геометрический тензор, т. е. тензор, полностью определяемый локальной геометрией, но не выражающийся через $R_{\alpha\beta}$ и R . Обозначим его $^{(4)}H_{\mu\nu}$. Таким образом,

$$\langle T_{\mu}^{\nu} \rangle_{\text{рен}} = A ^{(1)}H_{\mu}^{\nu} + B ^{(3)}H_{\mu}^{\nu} + ^{(4)}H_{\mu}^{\nu}, \quad (6.146)$$

где A и B — некоторые постоянные. След от (6.146) имеет вид

$$\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_{\text{рен}} = -6A \square R - B \left(R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - \frac{1}{3} R^2 \right) + ^{(4)}H_{\mu}^{\mu}, \quad (6.147)$$

сравнивая с (6.112) (напомним, что $F = C_{\alpha\beta\gamma\delta} C^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$), находим

$$A = -\alpha/144\pi^2, \quad B = -\beta/8\pi^2, \quad ^{(4)}H_{\mu}^{\mu} = 0. \quad (6.148)$$

Следовательно, аномальный след определяет $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}}$ с точностью до локального сохраняющегося бесследового тензора ${}^{(4)}H_{\mu\nu}$, значения которого, во всяком случае, должны зависеть от выбора квантового состояния. Сопоставление (6.139) с (6.148) показывает, что ${}^{(4)}H_{\mu\nu}$ следует отождествить с «граничным» членом $(\tilde{g}/g)^{1/2} \langle T_{\mu}{}^{\nu} [\tilde{g}_{\kappa\lambda}] \rangle_{\text{рен}}$.

Применим теперь формулу (6.139) к некоторым специальным случаям, а именно к моделям Робертсона — Уокера, обсуждавшимся в разд. 5.5. Любое однородное и изотропное распределение материи (в том числе в состоянии конформного вакуума) для этого класса пространств имеет одинаковые геометрические симметрии. Это накладывает на $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}}$ следующие ограничения:

$$\begin{aligned} \langle T_1^1 \rangle &= \langle T_2^2 \rangle = \langle T_3^3 \rangle, \\ \langle T_{\mu}{}^{\nu} \rangle_{\text{рен}} &= 0, \quad \mu \neq \nu. \end{aligned} \quad (6.149)$$

Используя координаты, в которых метрика имеет вид (5.11), и принимая во внимание (5.13), получаем

$$\begin{aligned} {}^{(1)}H_{00} &= C^{-1} \left[-9\ddot{D}\dot{D} + \frac{9}{2}\dot{D}^2 + \frac{27}{8}D^4 + 9KD^2 - 18K^2 \right], \\ {}^{(1)}H_{11} &= C^{-1}\Upsilon \left[6\ddot{D} - 3\dot{D}\dot{D} + \frac{3}{2}\dot{D}^2 - 9\dot{D}D^2 + \frac{9}{8}D^4 - \right. \\ &\quad \left. - 12K\dot{D} + 3KD^2 - 6K^2 \right]; \end{aligned} \quad (6.150)$$

$${}^{(3)}H_{00} = C^{-1} \left[\frac{3}{16}D^4 + \frac{3}{2}KD^2 + 3K^2 \right], \quad (6.151)$$

$${}^{(3)}H_{11} = C^{-1}\Upsilon \left[-\frac{1}{2}\dot{D}D^2 + \frac{1}{16}D^4 - 2K\dot{D} + \frac{1}{2}KD^2 + K^2 \right].$$

Для пространств, изображенных на рис. 20, $a = g$, конформный вакуум совпадает с вакуумом пространства Минковского, поэтому первый член в правой части (6.239) обращается в нуль, и математическое ожидание тензора энергии-импульса в состоянии конформного вакуума определяется полностью выражениями (6.150) и (6.151). В частности, для вселенной Эйнштейна, для которой $C = a^2 = \text{const}$, $D = 0$ (разд. 5.2), получаем

$$\langle T_{\mu}{}^{\nu} \rangle_{\text{Эйнштейн}} = \frac{p(s)}{2\pi^2 a^4} \text{diag} \left(1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right), \quad (6.152)$$

где $p(s)$ — зависящий от спина коэффициент, который принимает значения $p(0) = 1/240$, $p(1/2) = 17/960$, $p(1) = 11/120$. (Случай вселенной Эйнштейна с отождествленными точками см. в работе [324].) В закрытом пространстве-времени де Ситтера

(5.65) или в стационарной вселенной (5.52) находим

$$\langle T_{\mu}^{\nu} \rangle_{\text{стационар.}} = \frac{q(s)}{960\pi^2 a^4} \delta_{\mu}^{\nu}, \quad (6.153)$$

где $q(0) = 1$, $q(1/2) = 11/2$, $q(1) = 62$.

Для пространств, показанных на рис. 20, ∂, e , конформный вакуум может быть связан с вакуумом Минковского или вакуумом Риндлера (разд. 4.5). В последнем случае первый член в правой части (6.139) не обращается в нуль. Элемент длины в четырехмерном пространстве Риндлера можно записать в виде

$$ds^2 = \xi^2 d\eta^2 - d\xi^2 - dy^2 - dz^2 \quad (0 < \xi < \infty), \quad (6.154)$$

что представляет собой четырехмерное обобщение выражения (4.71) при $\xi = a^{-1}e^{a\xi}$ и с заменой η на $a^{-1}\eta$. С помощью преобразования координат

$$\begin{aligned} \xi &= Y^{1/2} (1 - rY^{1/2} \cos \theta)^{-1}, \\ y &= rY^{1/2} \sin \theta \cos \phi (1 - rY^{1/2} \cos \theta)^{-1}, \\ z &= rY^{1/2} \sin \theta \sin \phi (1 - rY^{1/2} \cos \theta)^{-1}, \end{aligned} \quad (6.155)$$

где величина Y принимает значение $(1 + r^2)^{-1}$, соответствующее $K = -1$, выражение (6.154) приводится к виду

$$ds^2 = \xi^2 [d\eta^2 - Y dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (6.156)$$

откуда видна конформная связь пространств Риндлера и Робертсона — Уокера при $K = -1$. Канделас и Дейч [89, 90] вычислили среднее значение тензора энергии-импульса в состоянии вакуума Риндлера и получили интересный результат

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu}^{\nu} [\eta_{\lambda\mu}] \rangle_{\text{Риндлер}} &= \frac{h(s)}{2\pi^2 \xi^4} \int_0^{\infty} \frac{d\nu \nu (\nu^2 + s^2)}{e^{2\pi\nu} - (-1)^{2s}} \times \\ &\quad \times \text{diag}(-1, 1/3, 1/3, 1/3), \end{aligned} \quad (6.157)$$

где $h(s)$ — число спиральных состояний поля со спином s .

Теперь довольно просто получить $\langle T_{\mu}^{\nu} \rangle_{\text{рен}}$ для статической открытой вселенной (разд. 5.2). Геометрические вклады $^{(1)}H_{\mu}^{\nu}$. $^{(3)}H_{\mu}^{\nu}$ будут теми же самыми, что и для эйнштейновской вселенной, поэтому

$$\langle T_{\mu}^{\nu} \rangle_{\text{стат. отр.}} = \langle \xi^4/a^4 \rangle \langle T_{\mu}^{\nu} \rangle_{\text{Риндлер}} + \langle T_{\mu}^{\nu} \rangle_{\text{Эйнштейн}} = 0. \quad (6.158)$$

Последнее равенство следует из возможности представления $p(s)$ в (6.152) в виде

$$p(s) = h(s) \int_0^{\infty} \frac{d\nu \nu (\nu^2 + s^2)}{e^{-2\pi\nu} - (-1)^{2s}}. \quad (6.159)$$

С другой стороны, можно получить соотношение (6.158) из независимых соображений [70] (разд. 7.2) и, таким образом, прийти к (6.157). Термодинамические соотношения между различными вакуумными состояниями, схематически изображенные на рис. 21, непосредственно вытекают из вида интегралов планковского типа (6.157) и (6.159).

Наконец статическая форма пространства де Ситтера (5.76) представляет собой еще один интересный пример пространства, конформно-связанного с пространством Риндлера. Метрика (5.76), записанная в виде

$$ds^2 = [1 - (r^2/\alpha^2)] \{ dt^2 - [1 - (r^2/\alpha^2)]^{-2} dr^2 - \\ - r^2 [1 - (r^2/\alpha^2)]^{-1} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \}$$

после замены переменной $r/\alpha = r' [1 + (r')^2]^{-1/2}$ приводится к виду

$$ds^2 = (\alpha^2 - r^2) [(dt^2/\alpha^2) - Y dr'^2 - r'^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (6.160)$$

где $Y = [1 + (r')^2]^{-1}$, что имеет явную конформную связь с (6.156), если положить $\eta = t/\alpha$. Вклад геометрических членов в (6.139) не зависит от координат и поэтому будет таким же, как и в случае стационарной вселенной (6.153). Таким образом, для среднего значения тензора энергии-импульса в статическом конформном вакууме пространства де Ситтера (пространства Риндлера) сразу же получаем выражение

$$\langle T_{\mu}^{\nu} \rangle_{\text{стат. де Ситтер}} = \xi^4 (\alpha^2 - r^2)^{-2} \langle T_{\mu}^{\nu} \rangle_{\text{Риндлер}} + \langle T_{\mu}^{\nu} \rangle_{\text{стационар.}} = \\ = \frac{-p(s)}{2\pi^2} (\alpha^2 - r^2)^{-2} \text{diag} (1, -1/3, -1/3, -1/3) + \\ + \frac{q(s)}{960\pi^2 \alpha^4} \delta_{\mu}^{\nu}, \quad (6.161)$$

которое, очевидно, имеет особенность на горизонте ($r = \alpha$). Это нежелательная черта, присущая «зависящему от наблюдателя» вакууму де Ситтера, как отмечено в конце разд. 5.4.

Полезное соотношение между конформной аномалией и полным тензором энергии-импульса в пространствах Робертсона — Уокера было получено Паркером [388]. Пространства Робертсона — Уокера обладают конформным векторным полем Киллинга ξ^{μ} (разд. 3.1):

$$\xi^{\mu} = a(t) \delta^{\mu}_t, \quad (6.162)$$

где $a = C^{1/2}$, и величина λ из (3.23) равна

$$\lambda = 2a'(t) \quad (6.163)$$

(штрих обозначает дифференцирование по t). Из условий сохранения (6.142) и (3.23) находим

$$[\langle T^{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}} \xi_{\nu}]_{;\mu} = \langle T^{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}} \xi_{(\nu;\mu)} = \frac{1}{2} \lambda \langle T^{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}} g_{\mu\nu}. \quad (6.164)$$

Интегрируя (6.164) по 4-объему, ограниченному гиперповерхностями постоянного времени t_1 и t_2 , получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^4x (-g)^{1/2} \lambda \langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_{\text{рен}} &= \int_{t_2} d^3x (-g)^{1/2} \langle T^{t\nu} \rangle_{\text{рен}} \xi_{\nu} - \\ &- \int_{t_1} d^3x (-g)^{1/2} \langle T^{t\nu} \rangle_{\text{рен}} \xi_{\nu}, \end{aligned} \quad (6.165)$$

где мы воспользовались теоремой о дивергенции. Поскольку $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ является функцией одного лишь t , (6.165) приводится к виду

$$\rho(t_2) a^4(t_2) = \rho(t_1) a^4(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} a^3 a' \langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_{\text{рен}} dt, \quad (6.166)$$

где $\rho = \langle T^{tt} \rangle_{\text{рен}}$ представляет собой собственную плотность энергии, измеренную сопутствующим наблюдателем, и использованы равенства (6.162) и (6.163).

Если применить (6.166) отдельно к члену ${}^{(4)}H^{\mu\nu}$, то из условия равенства нулю следа найдем

$${}^{(4)}H_1^1 = -\frac{1}{3} {}^{(4)}H_t^t = -\frac{1}{3} \rho(t) \sim a^{-4}(t), \quad (6.167)$$

откуда видно, что тензор ${}^{(4)}H_{\mu\nu}$ описывает классическое безмассовое излучение с характерным красным смещением при расширении вселенной: полная энергия в сопутствующем объеме ${}^{(4)}H_{tt} a^3$ уменьшается как a^{-1} . Условие сохранения (6.142) в этом случае принимает простой вид

$$p da^3 + d(\rho a^3) = 0, \quad (6.168)$$

где давление $p = -{}^{(4)}H_1^1$.

Если применить (6.166) к полному тензору энергии-импульса $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}}$, даваемому формулой (6.146), то следует учесть ненулевой след (6.147). С помощью формул (5.13), переписанных в виде

$$R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} = C^{-2} \left[3\dot{D}^{-2} + \frac{3}{2} \dot{D} D^2 + \frac{3}{4} D^4 + 6K\dot{D} + 6KD^2 + 12K^2 \right], \quad (6.169)$$

$$\square R = C^{-2} \left[3\ddot{D} - \frac{9}{2} \dot{D} D^2 - 6K\dot{D} \right], \quad (6.170)$$

легко проверить, что подынтегральное выражение в (6.166) представляет собой полную производную по времени. Интегрирование вклада, который дает след, приводит к выражению

$$3[B(a'^4 + 2Ka'^2) + 12A(-a^2a'a''' - aa'^2a'' + \frac{1}{2}a^2a''^2 + \frac{3}{2}a'^4 + Ka'^2)], \quad (6.171)$$

где A, B определяются формулами (6.148).

В случае асимптотически статического пространства-времени выражение (6.171) обращается в нуль и (6.166) приводит к соотношению

$$\rho(\text{in})a^4(\text{in}) = \rho(\text{out})a^4(\text{out}), \quad (6.172)$$

выражающему тот факт, что первоначальная энергия поля любого происхождения (например, возникающая из-за кривизны или присутствия квантов) испытывает в out-области красное смещение, такое же, как и классическое излучение. В процессе расширения не происходит ни возрастания, ни убывания энергии поля. Это совсем не удивительно для конформно-тривиальной ситуации. В самом деле, мы уже знаем из результатов разд. 3.7, что в процессе расширения не происходит рождения квантов, если поле находится в состоянии конформного вакуума. Соотношение (6.172) является лишь другим выражением того же факта.

6.4. Расчет перенормированного тензора энергии-импульса

В предшествующих разделах этой главы продемонстрировано, как расходящаяся величина $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ может быть сделана конечной с помощью перенормировки констант связи в гравитационном действии, т. е. введения бесконечных контрчленов, имеющих чисто геометрическую природу, которые можно считать обусловленными динамикой гравитационного поля. Разумеется, интерес представляют не сами расходимости, а конечные величины, которые остаются после их устранения, поскольку именно они имеют физический смысл. В частности $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}}$ является величиной, которая должна находиться в правой части обобщенных уравнений Эйнштейна (6.95). Если для некоторых конформно-тривиальных систем величина $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}}$ может быть рассчитана полностью по известной конформной аномалии (разд. 6.3), то в общем случае такой простой способ расчета отсутствует и необходимо применять трудоемкие методы «грубой силы». В этом разделе мы коротко опишем применение таких методов.

Прежде всего выясним, какую величину следует вычислять. Стандартное применение представления де Витта — Швингера приводит к величине

$$\frac{\langle \text{out}, 0 | T_{\mu\nu} | 0, \text{in} \rangle}{\langle \text{out}, 0 | 0, \text{in} \rangle}, \quad (6.173)$$

которая, очевидно, не является математическим ожиданием. Эта роль принадлежит величинам типа $\langle \psi | T_{\mu\nu} | \psi \rangle$. В рамках гейзенберговской картины естественно выбрать квантовое состояние в in-области, например $\langle \text{in}, 0 | T_{\mu\nu}(x) | 0, \text{in} \rangle$, где x может обозначать любую точку пространства-времени. Как показано в конце разд. 6.2, расходимости и, следовательно, перенормировки для различных вакуумных ожиданий одинаковы. Различаются лишь конечные остатки.

В принципе можно попытаться вычислить $\langle \psi | T_{\mu\nu} | \psi \rangle$, пользуясь перенормированным эффективным лагранжианом $L_{\text{рен}}$, и рассчитать коэффициенты Λ в (6.96). Но помимо технической сложности представление де Витта — Швингера не заслуживает доверия в области больших длин волн, если пользоваться асимптотическим разложением того же типа, что и при получении (6.61). Вместо этого лучше сразу же вычислять величину $\langle \psi | T_{\mu\nu} | \psi \rangle$, прибегая к представлению де Витта — Швингера лишь при проведении перенормировок.

Поскольку $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}}$ определяется низкоэнергетической длинноволновой частью $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, эта величина зависит от глобальной структуры пространственно-временного многообразия и выбора квантового состояния поля. Поэтому она уже не будет иметь чисто геометрический вид и даже не будет локальной. Существуют различные методы расчета $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}}$ в зависимости от принятого способа регуляризации.

Хотя формальное обсуждение перенормировок было основано на функционале действия, при практическом проведении расчетов следовать этому пути не удастся. Причина состоит в том, что для осуществления функционального дифференцирования $W_{\text{рен}}$ по $g_{\mu\nu}$ с целью получения $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}}$, вообще говоря, нужно знать $W_{\text{рен}}$ для всех геометрий $g_{\mu\nu}$. Эту задачу решить невозможно. Есть, правда, одно исключение, а именно конформно-тривиальный случай, в котором полный тензор энергии-импульса полностью определяется своими конформными свойствами. Во всех остальных случаях необходимо непосредственно вычислять $\langle T_{\mu\nu} \rangle$.

Число явных примеров, в которых могут быть использованы аналитические методы регуляризации, довольно ограничено, поскольку мало пространств, допускающих точное решение волнового уравнения в n измерениях или приведение расходящихся величин к виду, соответствующему обобщенным ξ -функциям.

Один из интересных случаев, в котором благодаря высокой степени геометрической симметрии может успешно применяться размерная регуляризация, представляет собой пространство де Ситтера. Если выбранное вакуумное состояние инвариантно относительно группы де Ситтера (разд. 5.4), то поскольку единственным (максимально) форм-инвариантным тензором второго ранга является $g_{\mu\nu}$ (см., например, [494], § 13.4), мы должны иметь

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = T g_{\mu\nu} / n, \quad (6.174)$$

где T — след тензора энергии-импульса:

$$T = \langle T_{\mu}^{\mu} \rangle. \quad (6.175)$$

Для массивного скалярного поля, воспользовавшись уравнением (3.26), из (3.190) получим

$$T_{\mu}^{\mu} = m^2 \phi^2 + (n-1) [\xi - \xi(n)] \square \phi^2; \quad (6.176)$$

следовательно, на основании (2.66) имеем

$$T = \langle T_{\mu}^{\mu} \rangle = \frac{1}{2} m^2 G^{(1)}(x, x) + \frac{1}{2} (n-1) [\xi - \xi(n)] \square G^{(1)}(x, x). \quad (6.177)$$

Величина $G^{(1)}(x, x)$ расходится при $n=4$, но может быть конечной при $n \neq 4$. Она была получена для всех n Канделасом и Рэйном [92] (в случае $\xi=0$) и Даукером и Кричли [172]. Результат имеет вид

$$G^{(1)}(x, x) = \frac{2\alpha^2}{(4\pi\alpha^2)^{n/2}} \frac{\Gamma(\nu(n) - 1/2 + n/2) \Gamma(-\nu(n) - 1/2 + n/2)}{\Gamma(1/2 + \nu(n)) \Gamma(1/2 - \nu(n))} \Gamma(1 - n/2), \quad (6.178)$$

где α — радиус вселенной де Ситтера (см. (5.49)) и

$$[\nu(n)]^2 = \frac{1}{4} (n-1)^2 - m^2 \alpha^2 - \xi n (n-1) \quad (6.179)$$

(ср. (5.60)). Отметим, что, так как $G^{(1)}$ не зависит от x , вклад в след тензора энергии-импульса дает только первый член в (6.177):

$$T = \frac{1}{2} m^2 G(x, x). \quad (6.180)$$

Выражение (6.178) имеет полюс при $n=4$. Особенность можно устранить, разлагая $G^{(1)}$ в ряд в окрестности $n=4$ и вычитая адиабатическое разложение $G_{DS}^{(1)}$, оборванное на соответствующем порядке адиабатичности A , которое также следует разложить около $n=4$. Оборванное разложение де Витта — Швингера мы будем обозначать далее через $^{(A)}G_{DS}^{(1)}$. Смысл этой процедуры в том, что именно низшие члены в адиабатическом

разложении $G_{DS}^{(1)}$ в соответствии с (6.37) дают вклад в $L_{\text{расх}}$. Вычитание этих членов из $G^{(1)}$ эквивалентно перенормировке $L_{\text{эфф}}$ через (6.58).

Для того чтобы определить порядок адиабатичности A , на котором следует оборвать разложение $G_{DS}^{(1)}$, заметим, что в $L_{\text{расх}}$ имеются члены четвертого порядка (в виде $G_{DS}^{(1)}$). Следовательно, мы должны удерживать в $G_{DS}^{(1)}$ те члены, которые при подстановке в $L_{\text{расх}}$ будут давать члены до четвертого адиабатического порядка. Но в случае пространства де Ситтера из (6.177) и (6.180) видно, что при подстановке в $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ производные от $G^{(1)}$ не возникают. Поскольку адиабатический порядок $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ тот же, что и для $L_{\text{расх}}$, это означает, что разложение $G_{DS}^{(1)}$ должно быть оборвано на четвертом порядке (для n измерений — на адиабатическом порядке n). В явном виде, воспользовавшись (3.135) и (3.137) и повторяя выкладки, приведшие к (6.41), получаем

$$^{(4)}G_{DS}^{(1)} = 2m^{n-4} (4\pi)^{-n/2} \{a_0(x) m^2 \Gamma(1 - n/2) + a_1(x) \Gamma(2 - n/2) + a_2(x) m^{-2} \Gamma(3 - n/2)\}, \quad (6.181)$$

где для n -мерного пространства де Ситтера $a_0(x) = 1$, $a_1(x) = (1/6 - \xi)n(n-1)\alpha^{-2}$, а функция a_2 , необходимая только в четырехмерном случае, дается выражением

$$a_2(x) = \left[2(1 - 6\xi)^2 - \frac{1}{15}\right] \alpha^{-4} \quad (n=4).$$

Вычитая (6.181) из (6.178) и разлагая результат вблизи $n=4$, получаем

$$G^{(1)}(x, x) - ^{(4)}G_{DS}^{(1)}(x, x) = (1/8\pi^2\alpha^2) \{m^2\alpha^2 + 12\xi - 2\} [\psi(3/2 + \nu) + \psi(3/2 - \nu) - \ln(m^2\alpha^2) - 1] + m^2\alpha^2 - 2/3 - (\alpha/m)^2 a_2\} + O(n-4). \quad (6.182)$$

Далее, воспользовавшись (6.180) и (6.174), можно получить перенормированный тензор энергии-импульса при $n=4$ [172]

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}} = (g_{\mu\nu}/64\pi^2) \{m^2 [m + (\xi - 1/6)R] [\psi(3/2 + \nu) + \psi(3/2 - \nu) - \ln(12m^2R^{-1})] - m^2(\xi - 1/6)R - \frac{1}{18} m^2 R - \frac{1}{2} (\xi - 1/6)^2 R^2 + \frac{1}{2160} R^2\}. \quad (6.183)$$

где использовано соотношение $R = 12\alpha^{-2}$. Заметим, что в безмассовом пределе в случае конформной связи $(\xi - 1/6)$ след (6.183), определяемый выражением (6.180) для перенормированных величин, полностью обусловлен последним членом в (6.182): $T_{\text{рен}} = -a_2/16\pi^2$ в согласии с (6.120).

Обратимся теперь к примеру использования ζ -регуляризации [170]. В разд. 5.2 мы получили решения для нормальных мод безмассового скалярного уравнения с конформной связью в статической вселенной Эйнштейна (см. (5.28)). Поскольку пространственные сечения компактны, *полная* перенормированная энергия вакуума, обусловленная кривизной пространства-времени и нетривиальной топологией, будет конечна. Поэтому можно вычислить эту величину вместо плотности энергии, а затем, воспользовавшись пространственной однородностью, благодаря которой плотность энергии постоянна, рассчитать $\langle 0 | T_0^0 | 0 \rangle$, разделив на полный объем пространства $2\pi^2 a^3$.

Полная энергия определяется выражением

$$E = \int d^3 x h^{1/2} \langle 0 | T_0^0 | 0 \rangle, \quad (6.184)$$

которое для конформно-связанного безмассового скалярного поля во вселенной Эйнштейна равно

$$E = \frac{1}{2} \int d\mu(k) (k/a), \quad (6.185)$$

где мы воспользовались соотношениями (3.190), (5.15), (5.28), и (5.19). Это выражение аналогично результату для пространства Минковского (2.38); причем $1/2(k/a)$ представляет собой собственное значение энергии мод, характеризуемых индексом k . С помощью (5.24) находим

$$E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{M=-j}^j (k/a) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (k/a), \quad (6.186)$$

откуда видно, что вклад в энергию от вырожденных состояний с заданным k пропорционален k^2 . Сумма в (6.186) расходится как k^4 . Для регуляризации заменим собственное значение энергии $k/2a$ на $(k/2a)^{-s}$; тогда

$$E = \lim_{s \rightarrow -1} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (k/2a)^{-s}. \quad (6.187)$$

Теперь сумма в (6.187) пропорциональна ζ -функции Римана, а именно

$$(2a)^s \zeta(s-2). \quad (6.188)$$

Но эта величина при аналитическом продолжении к точке $s = -1$ остается *конечной*. Поэтому из (6.187) имеем

$$E = \zeta(-3)/2a = 1/240a. \quad (6.189)$$

Разделив E на собственный объем пространства, найдем простое выражение для плотности энергии

$$\rho = 1/480\pi^2 a^4; \quad (6.190)$$

поскольку аномальный след во вселенной Эйнштейна обращается в нуль, из (6.190) можно найти полный перенормированный тензор энергии-импульса:

$$\langle 0 | T_{\mu}^{\nu} | 0 \rangle_{\text{рен}} = \frac{1}{480\pi^2 a^4} \text{diag} (1, -1/3, -1/3, -1/3). \quad (6.191)$$

Этот результат впервые был получен Фордом [202] с помощью обрезания суммы по модам; он находится в согласии с (6.152) (см. также [173]).

В качестве последнего примера использования аналитического метода регуляризации вычислим «казимировскую» плотность энергии в плоском пространстве с топологией $R^1 \times S^1$ для безмассового конформно-связанного скалярного поля [311]. Плотность энергии вакуума равна (разд. 4.1)

$$(2\pi/L^2) \sum_{n=0}^{\infty} n \quad \text{и} \quad (\pi/L^2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| n + \frac{1}{2} \right| \quad (6.192)$$

для нескрученного и скрученного полей соответственно. С помощью замены n и $|n + 1/2|$ на n^{-s} и $|n + 1/2|^{-s}$ можно выразить (6.192) через ξ -функции, аналитически продолженные назад к точке $s = -1$:

$$(2\pi/L^2) \xi(-1) = -\pi/6L^2, \quad (6.193)$$

$$(\pi/L)^2 [\xi(-1, 1/2) + \xi(-1, -1/2) + 1/2] = \pi/12L^2 \quad (6.194)$$

соответственно, где

$$\xi(s, q) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (q + n)^{-s}, \quad \text{Re } s > 1, \quad (6.195)$$

и значение $\xi(-1, q)$ дается, например, в работе [247], (9.531). Равенства (6.193) и (6.194) находятся в согласии с равенствами (4.8) и (4.11), полученными методом обрезания.

Заметим, что ни в одном из двух последних примеров не возникло необходимости в явной перенормировке каких-либо величин. Аналитическое продолжение позволяет просто отбросить расходящиеся члены, получая конечный ответ. Всегда ли при этом опускаются именно нужные члены (т. е. такие, которые в другой схеме регуляризации были бы поглощены при перенормировке констант связи), доказано не было, хотя обычно считается, что это так.

С точки зрения практических вычислений, по-видимому, наиболее эффективным методом регуляризации является расщепление (раздвижка) точек. При этом снова в общем случае оказывается невозможным получить $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}}$ с помощью функционального дифференцирования эффективного действия. Вместо этого приходится работать непосредственно с $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ или, что предпочтительнее, с более простой функцией $G^{(1)}(x, x')$. Перенормировка $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ выполняется путем вычитания членов вплоть до адиабатического порядка n в разложении $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{DS}$, получаемом дифференцированием $G_{DS}^{(1)}(x, x')$. Эти члены возникают из $L_{\text{расх}}$, и их вычитание эквивалентно перенормировке констант в обобщенном эйнштейновском действии. Можно также построить $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}}$, действуя на

$$G_{\text{рен}}^{(1)}(x, x') = G^{(1)}(x, x') - {}^{(n)}G_{DS}^{(1)}(x, x') \quad (6.196)$$

дифференциальным оператором, получаемым из (3.190) способом, который коротко описывается ниже. В ${}^{(n)}G_{DS}^{(1)}$ удерживают только члены, которые дают вклад в тензор энергии-импульса адиабатического порядка n и ниже. Это члены порядка n или ниже в ${}^{(n)}G_{DS}^{(1)}$, хотя следует соблюдать осторожность, поскольку при дифференцировании адиабатический порядок величин может изменяться. Таким образом, процедура расчета перенормированного тензора энергии-импульса с помощью расщепления точек в целом выглядит так:

1) Из уравнений поля находят полный набор нормальных мод, с помощью которых можно определить состояния частиц.

2) Строят $G^{(1)}(x, x')$ в виде суммы по модам.

3) Находят $G_{\text{рен}}^{(1)}$, согласно (6.196), обрывая разложение $G_{DS}^{(1)}$ на порядке n .

4) Действуют на $G_{\text{рен}}^{(1)}$ соответствующим оператором, чтобы найти $\langle 0 | T_{\mu\nu}(x, x') | 0 \rangle_{\text{рен}}$, отбрасывая члены адиабатического порядка выше n , которые возникают при дифференцировании членов в ${}^{(n)}G_{DS}^{(1)}$.

5) Полагают $x' \rightarrow x$ и записывают окончательный результат для $\langle 0 | T_{\mu\nu}(x) | 0 \rangle_{\text{рен}}$.

Состояние $|0\rangle$ будет зависеть, конечно, от определения «положительно-частотных» мод на первом этапе расчета.

Дифференцирование $G^{(1)}(x, x')$, вообще говоря, является сложной процедурой. Формально мы имеем

$$\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle = \lim_{x' \rightarrow x} \mathcal{D}_{\mu\nu}(x, x') G^{(1)}(x, x'). \quad (6.197)$$

Функция Грина $G^{(1)}(x, x')$ является не скалярной функцией x , а бискалярной функцией двух пространственно-временных точек

x и x' , т. е. преобразуется как скаляр в каждой точке¹⁾. (Поля высших спинов приводят к би-спинорам, би-векторам и т. д.) Следовательно, дифференциальный оператор $D_{\mu\nu}(x, x')$ является нелокальным. Например, первый член в (3.190) приводит к среднему значению

$$(1 - 2\xi) \langle 0 | \nabla_\mu \phi(x) \nabla_\nu \phi(x) | 0 \rangle, \quad (6.198)$$

которое в методе расщепления точек понимается как

$$\lim_{x' \rightarrow x} \frac{1}{2} (1 - 2\xi) [\nabla_\mu \nabla_\nu + \nabla_\nu \nabla_\mu] \frac{1}{2} G^{(1)}(x, x'), \quad (6.199)$$

где штрих у производной указывает на то, что она действует на x' , а не на x . Это означает, что возникающий объект является не тензором, а би-вектором. (Выражение (6.199) записано в наиболее симметричном виде, хотя это и не существенно.)

Чтобы построить тензор из би-вектора и восстановить требуемую ковариантность, необходимо осуществить параллельный перенос дифференцируемых векторов (спиноров и т. д.) в одну пространственно-временную точку, в качестве которой можно взять среднюю точку отрезка между x и x' , один из концов этого отрезка (например, x) или какую-нибудь другую точку. Различия между перенесенными параллельно и не перенесенными величинами остается и в пределе совпадающих точек x и x' ; оно обусловлено множителем σ^{-1} в разложении $G^{(1)}(x, x')$ для поправок порядка σ при параллельном переносе. К счастью, эти сложные поправки были вычислены раз и навсегда в работах [5, 6, 69, 137, 413, 414], и мы не будем обсуждать эти подробности.

Следует, однако, заметить, что если сначала перенормировать $G^{(1)}$ (до дифференцирования, приводящего к $\langle T_{\mu\nu} \rangle$), согласно (6.196), то все члены типа σ^{-1} будут заведомо устранены, поэтому любые поправки порядка σ , возникающие при параллельном переносе, исчезают при $\sigma \rightarrow 0$ в конце вычисления. Таким образом, при практических вычислениях эффекты параллельного переноса следует учитывать только в том случае, если сначала строится неперенормированный тензор энергии-импульса.

Мы рассмотрим симметричный случай, когда строится функция $G^{(1)}(x'', x')$ от двух точек x'' , x' , лежащих на (малом) одинаковом собственном расстоянии от интересующей нас точки x с каждой стороны вдоль некоторой неизотропной геодезической, проходящей через x (рис. 22). Симметризация, хотя и не является необходимой, упрощает некоторые выражения. В конце вычисления обе точки x'' и x' устремляются к x . Собственное (малое) расстояние между x и x' обозначается через ε , а

¹⁾ См. примечание на с. 95.

направление геодезической параметризуется касательным вектором t^μ в точке x . (Если разделенные точки x'' , x' остаются в нормальной окрестности точки x , эта геодезическая будет единственной.)

Для применения формализма в качестве первого шага следует превратить $G^{(1)}$ в функцию ϵ и t^μ вместо x'' и x' . Для этого необходимо решить уравнения геодезической, соединяющей точки x'' , x и x' , относительно ϵ и t^μ с помощью рядов по ϵ вплоть до порядка ϵ^{n+1} . Соответствующие результаты имеются для двух важных случаев: двумерного пространства-времени и четырехмерных пространств Робертсона — Уокера. Для двумерного случая [136]

$$u(\epsilon) = u + \epsilon t^n - \frac{1}{2} C^{-1} C_{,u} (t^\mu)^2 \epsilon^2 + \\ + \frac{1}{6} C \left[C^{-3} (3C_{,u}^2 - CC_{,uu}) t^\mu - \frac{1}{4} R t^\nu \right] (t^\mu)^2 \epsilon^3 + \dots, \quad (6.200)$$

где использованы изотропные координаты u и v и метрика (6.135). Аналогичное выражение справедливо для $v(\epsilon)$ с заменой u на v и обратно. Подразумевается, что функция C и ее производные вычислены в средней точке $x = (u, v)$. Конечные точки задаются соотношениями $x' = (u(\epsilon), v(\epsilon))$, $x'' = (u(-\epsilon), v(-\epsilon))$.

Для пространства-времени Робертсона — Уокера с элементом длины (5.7), не ограничивая общности, можно выбрать $\theta'' = \theta' = \theta$, $\phi'' = \phi' = \phi$, поскольку пространство изотропно. Тогда требуется знать только $\eta(\epsilon)$ и $r(\epsilon)$, определяемые выражениями [69, 77]

$$\eta(\epsilon) = \eta + \epsilon t^\eta + \frac{1}{2!} \epsilon^2 t_2^\eta + \frac{1}{3!} \epsilon^3 t_3^\eta + \frac{1}{4!} \epsilon^4 t_4^\eta \dots, \\ r(\epsilon) = r + \epsilon t^r + \frac{1}{2!} \epsilon^2 t_2^r + \frac{1}{3!} \epsilon^3 t_3^r + \frac{1}{4!} \epsilon^4 t_4^r + \dots, \quad (6.201)$$

где

$$t_2^\eta = -\frac{1}{2} D (t^\eta)^2 - \frac{1}{2} D \Upsilon (t^r)^2, \\ t_2^r = -D t^\eta t^r - K_r \Upsilon (t^r)^2, \\ t_3^\eta = \left(-\frac{1}{2} \dot{D} + \frac{1}{2} D^2 \right) (t^\eta)^3 + \left(-\frac{1}{2} \dot{D} + \frac{3}{2} D^2 \right) \Upsilon t^\eta (t^r)^2, \\ t_3^r = \left(-\dot{D} + \frac{3}{2} D^2 \right) (t^\eta)^2 t^r + 3DK_r \Upsilon t^\eta (t^r)^2 + \\ + \left(\frac{1}{2} D^2 - K \right) \Upsilon (t^r)^3, \\ t_4^\eta = \left(-\frac{1}{2} \dot{D} + \frac{7}{4} \dot{D} D - \frac{3}{4} D^3 \right) (t^\eta)^4 + \left(-\frac{1}{2} \dot{D} + 5\dot{D} D - \frac{9}{2} D^3 \right) \times \\ \times \Upsilon (t^\eta t^r)^2 + \left(\frac{1}{4} \dot{D} D - \frac{3}{4} D^3 \right) \Upsilon (t^r)^4,$$

$$\begin{aligned}
t_4^* &= (-\ddot{D} + 5\dot{D}D - 3D^3)(t^\eta)^3 t^r + (4\dot{D}Kr - 9D^2Kr) \Upsilon(t^\eta t^r)^2 + \\
&\quad + (2\dot{D}D - 3D^3 + 6DK) \Upsilon t^\eta (t^r)^3 + (-2D^2Kr + K^2r) \Upsilon^2 (t^r)^4, \\
t_5^\eta &= \left(-\frac{1}{2}\ddot{D} + \frac{11}{4}\dot{D}D + \frac{7}{4}\dot{D}^2 - \frac{23}{4}\dot{D}D^2 + \frac{3}{2}D^4\right)(t^\eta)^5 + \quad (6.202) \\
&\quad + \left(-\frac{1}{2}\ddot{D} + \frac{15}{2}\dot{D}D + 5\dot{D}^2 - 32\dot{D}D^2 + 15D^4\right) \Upsilon(t^\eta)^3 (t^r)^2 + \\
&\quad + \left(\frac{3}{4}\ddot{D}D + \frac{1}{4}\dot{D}^2 - \frac{33}{4}\dot{D}D^2 + \frac{15}{2}D^4\right) \Upsilon^2 t^\eta (t^r)^4, \\
t_5^r &= \left(-\ddot{D} + \frac{15}{2}\dot{D}D + 5\dot{D}^2 - \frac{43}{2}\dot{D}D^2 + \frac{15}{2}D^4\right)(t^\eta)^4 t^r + \\
&\quad + (5\dot{D}Kr - 35\dot{D}DKr + 30D^3Kr) \Upsilon(t^\eta)^3 (t^r)^2 + \\
&\quad + \left(\frac{7}{2}\ddot{D}D + 2\dot{D}^2 - \frac{47}{2}\dot{D}D^2 + 15D^4 + 10\dot{D}K - 30D^2K\right) \Upsilon(t^\eta)^2 (t^r)^3 + \\
&\quad + (-10\dot{D}DKr + 20D^3Kr - 10DK^2r) \Upsilon^2 t^\eta (t^r)^4 + \\
&\quad + \left(-\dot{D}D^2 + \frac{3}{2}D^4 - 5D^2K + K^2\right) \Upsilon^2 (t^r)^5.
\end{aligned}$$

Обозначения здесь те же, что в (5.12), и положено $t^\eta = t^0$, $t^r = t^1$ и т. д.

После того как $G^{(1)}$ переписано в терминах ε , t^μ , для проверки вычислений полезно удостовериться в том, что расходящиеся члены согласуются с соответствующими членами в $G_{DS}^{(1)}(x, x')$. Главные члены в $G_{DS}^{(1)}$ для скалярного случая имеют вид [69]

$$\begin{aligned}
G_{DS}^{(1)}(\varepsilon, t^\mu) &= -(1/\pi) \left\{ \left[1 - (m^2 + \xi R) \varepsilon^2 \Sigma \right] \left(\gamma + \frac{1}{2} \ln |m^2 \varepsilon^2| \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) m^{-2} R + \varepsilon^2 \Sigma \left[m^2 + \frac{1}{2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R \right] \right\} + O(\varepsilon^2 T^{-2}) + \\
&\quad + O(\varepsilon^4) + O(T^{-4}) \quad (6.203)
\end{aligned}$$

для двух измерений и [69, 80]

$$\begin{aligned}
G_{DS}^{(1)}(\varepsilon, t^\mu) &= -\frac{1}{8\pi^2 \varepsilon^2 \Sigma} + \frac{m^2 + \left(\xi - \frac{1}{6}\right) R}{4\pi^2} \left(\frac{1}{2} \ln |m^2 \varepsilon^2| + \gamma \right) + \\
&\quad + \frac{1}{24\pi^2} R_{\alpha\beta} \frac{t^\alpha t^\beta}{\Sigma} - \frac{m^2}{8\pi^2} + \frac{\varepsilon^2 \Sigma}{24\pi^2} \left(\frac{1}{2} \ln |m^2 \varepsilon^2| + \gamma \right) \left\{ -3m^4 - \right. \\
&\quad - 2m^2 R_{\alpha\beta} \frac{t^\alpha t^\beta}{\Sigma} - 6 \left(\xi - \frac{1}{6} \right) m^2 R + \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \left[-2R R_{\alpha\beta} \frac{t^\alpha t^\beta}{\Sigma} + \right. \\
&\quad \left. + R_{\alpha\beta} \frac{t^\alpha t^\beta}{\Sigma} - \square R - 3 \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R^2 \right] \left. \right\} + \frac{\varepsilon^2 \Sigma}{1440\pi^2} \left[225m^4 + \right. \\
&\quad \left. + 360m^2 \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R + 60m^2 R_{\alpha\beta} \frac{t^\alpha t^\beta}{\Sigma} + 6R_{\alpha\beta; \gamma\delta} \frac{t^\alpha t^\beta t^\gamma t^\delta}{\Sigma^2} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -14R_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta}\frac{t^{\alpha}t^{\beta}t^{\gamma}t^{\delta}}{\Sigma^2} + 4R_{\alpha\beta}R_{\beta}{}^{\rho}\frac{t^{\alpha}t^{\beta}}{\Sigma} - \frac{4}{3}RR_{\alpha\beta}\frac{t^{\alpha}t^{\beta}}{\Sigma} - \square R - R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + \\
& + \frac{1}{3}R^2 + 30\left(\xi - \frac{1}{6}\right)\square R + 90\left(\xi - \frac{1}{6}\right)^2R^2 + \frac{1}{1440\pi^2m^2}\times \\
& \times \left[R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}R^2 - \square R + 30\left(\xi - \frac{1}{6}\right)^2\square R + 90\left(\xi - \frac{1}{6}\right)^2R^2\right] + \\
& + O(\epsilon^4) + O(T^{-6}) \quad (6.204)
\end{aligned}$$

в конформно-плоских четырехмерных пространствах. В этих выражениях вектор t^{μ} нормирован, согласно (6.85), и, как и выше, символ $O(T^{-p})$ обозначает члены адиабатического порядка p (т. е. содержащие p -е производные от метрики).

Теперь можно выполнить перенормировки $G^{(1)}(x'', x')$. Записав эту величину как функцию ϵ и t^{μ} , следует просто вычесть из нее все выражение (6.203) для двумерного случая и (6.204) для четырехмерного. Но пока нельзя переходить к пределу при $\epsilon \rightarrow 0$, несмотря на то что $G_{\text{рен}}^{(1)}(x'', x')$ остается конечной при $x'', x' \rightarrow x$. Сначала нужно продифференцировать получившееся выражение и получить $\langle 0 | T_{\mu\nu}(x'', x') | 0 \rangle_{\text{рен}}$, отбросив все члены адиабатического порядка выше n , которые возникают при дифференцировании некоторых членов из (6.203) или (6.204).

Для выражения общего вида

$$\begin{aligned}
G^{(1)} = & c + \epsilon^2 \Sigma [e_{\alpha\beta}(t^{\alpha}t^{\beta}/\Sigma) + f] + \\
& + \epsilon^2 \Sigma [q_{\alpha\beta}(t^{\alpha}t^{\beta}/\Sigma) + r] \left(\gamma + \frac{1}{2} \ln |\alpha^2 \epsilon^2| \right), \quad (6.205)
\end{aligned}$$

где α и γ — постоянные, а $c, f, r, e_{\alpha\beta}$ и $q_{\alpha\beta}$ могут быть функциями x , результирующий тензор энергии импульса в пределе совпадающих точек имеет вид [80, 137]

$$\begin{aligned}
\langle T_{\mu\nu} \rangle = & \left(\frac{1}{2} - \xi \right) T_{\mu\nu}^{(1)} + \left[\left(\frac{n-1}{n} \right) (\xi - \xi(n)) - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} - \xi \right) \right] \times \\
& \times g_{\mu\nu} T_{\sigma}^{(1)\sigma} + \xi T_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{n} g_{\mu\nu} \xi T_{\sigma}^{(2)\sigma} - \frac{1}{2} c \xi \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \right. \\
& - \left(1 - \frac{n}{2} \right) \frac{1}{n} R g_{\mu\nu} + \frac{2(n-1)}{n} (\xi - \xi(n)) R g_{\mu\nu} \left. \right] + \\
& + \left[\frac{1}{2n} - \left(\frac{n-1}{n} \right) (\xi - \xi(n)) \right] m^2 g_{\mu\nu} c, \quad (6.206)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{(1)} = & \langle 0 | \{ \phi_{;\mu}, \phi_{;\nu} \} | 0 \rangle = -\frac{1}{2} (q_{\mu\nu} + r g_{\mu\nu}) \left[\gamma + \frac{1}{2} \ln |\alpha^2 \epsilon^2| \right] - \\
& - \frac{1}{4} q_{\alpha\beta} \frac{t^{\alpha}t^{\beta}}{\Sigma} \left(g_{\mu\nu} - \frac{2t^{\mu}t^{\nu}}{\Sigma} \right) - q_{(\mu\alpha} t^{\alpha} t_{\nu)} \Sigma^{-1} - \frac{1}{4} r \times \\
& \times \left(g_{\mu\nu} + \frac{2t^{\mu}t^{\nu}}{\Sigma} \right) + \frac{1}{4} c_{;\mu\nu} - \frac{1}{2} e_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f g_{\mu\nu}, \quad (6.207)
\end{aligned}$$

$$T_{\mu\nu}^{(2)} = -\langle 0 | \{ \phi, \phi_{;\mu\nu} \} | 0 \rangle = T_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2} c_{;\mu\nu}. \quad (6.208)$$

В случае конформной связи $\xi = \xi(n)$ выражение (6.206) имеет отличный от нуля след $1/2 m^2 c$. Заметим, что члены порядка ϵ^2 в $G^{(1)}$ дают конечный вклад в $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ после дифференцирования.

Анализ выражения (6.206) показывает, что вклад в $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}}$ адиабатического порядка выше n дают только те члены в (6.203) и (6.204), которые имеют порядок m^{-2} . При этом вклад достаточно низкого адиабатического порядка, который не следует отбрасывать при выполнении описанной процедуры, возникает лишь при подстановке этих членов в качестве c в последнее слагаемое в (6.206). Таким образом, вклад членов, пропорциональных m^{-2} , в $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}}$ оказывается порядка m^0 ; поэтому переход в случае необходимости к безмассовому пределу в $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}}$ не вызывает затруднений. Массу следует сохранить отличной от нуля до того, как будет выполнено дифференцирование, чтобы избежать появления инфракрасных расходимостей на промежуточных этапах вычислений.

В качестве примера этой довольно громоздкой процедуры вычислим $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}}$ для безмассового скалярного поля с конформной связью в двумерном пространстве-времени в состоянии конформного вакуума (другие примеры даны в следующей главе). Эта конформно-тривиальная ситуация уже рассматривалась в разд. 6.3 (см. (6.136)). Для того чтобы первое слагаемое в правой части (6.136) было отличным от нуля, проведем компактификацию пространственных сечений. Функции Грина для нескрученных и скрученных полей определяются выражениями (4.23) и (4.24) соответственно:

$$D_L^{(1)}(x'', x') = \begin{cases} -(1/4\pi) \ln [16 \sin^2(\pi \Delta u/L) \sin^2(\pi \Delta v/L)] & (\text{нескрученное поле}), \\ -(1/4\pi) \ln [\text{tg}^2(\pi \Delta u/2L) \text{tg}^2(\pi \Delta v/2L)] & (\text{скрученное поле}), \end{cases}$$

где $\Delta u = u(\epsilon) - u(-\epsilon)$, $\Delta v = v(\epsilon) - v(-\epsilon)$. Хотя в разд. 4.2 эти функции Грина были построены для плоского пространства-времени, они остаются теми же самыми и в рассматриваемом случае, поскольку пространство-время конформно-плоское и конформный вес для скалярного поля в двумерном случае равен нулю (см. (3.154)).

Воспользовавшись (6.200), можно сразу же построить разложение в ряд по ϵ для функции $D_L^{(1)}(x'', x')$:

$$\begin{aligned} \text{const} - (1/2\pi) \ln |\epsilon^2 C^{-1}| + (\epsilon^2/2\pi) \left\{ \frac{1}{12} R \Sigma + \frac{2}{3} (a\pi^2/L^2) [(t^u)^2 + \right. \\ \left. + (t^v)^2] + \frac{1}{6} C^{-2} (CC_{,uu} - 3C_{,u}^2) (t^u)^2 + \frac{1}{6} C^{-2} (CC_{,vv} - 3C_{,v}^2) \times \right. \\ \left. \times (t^v)^2 \right\} + O(\epsilon^4), \end{aligned}$$

где $\alpha = 1$ для нескрученного поля и $\alpha = -1/2$ для скрученного поля, и использовано условие нормировки (6.85), которое для метрики (6.135) имеет вид

$$C t^{\mu} t^{\nu} = \Sigma. \quad (6.209)$$

Для выполнения перенормировки необходимо вычесть выражение (6.203), полагая $\xi = 0$ (конформная связь) и $m = 0$ всюду, за исключением члена $m^{-2}R$ (см. замечания выше). В результате, помимо члена $m^{-2}R$, остается выражение

$$\begin{aligned} \text{const} + (1/2\pi) \ln C + \varepsilon^2 \Sigma \{ (\pi\alpha/3L^2) \Sigma^{-1} [(t^u)^2 + (t^v)^2] + \\ + (1/12\pi) \Sigma^{-1} C^{-2} (CC_{,uu} - 3C_{,u}^2) (t^u)^2 + (1/12\pi) \Sigma^{-1} C^{-2} \times \\ \times (CC_{,vv} - 3C_{,v}^2) (t^v)^2 - (1/24\pi) R \} + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Отсюда можно получить скалярные функции s и f и бесследовый тензор $e_{\alpha\beta}$ с компонентами

$$\begin{aligned} e_{uu} &= (\pi\alpha/3L^2) + \frac{1}{12} C^{-2} (CC_{,uu} - 3C_{,u}^2), \\ e_{vv} &= (\pi\alpha/3L^2) + \frac{1}{12} C^{-2} (CC_{,vv} - 3C_{,v}^2), \\ e_{uv} &= e_{vu} = 0, \end{aligned}$$

которые следует подставить в общую формулу (6.205). Все остальные члены равны нулю.

Из (6.206) — (6.208) при $n = 2$ получаем

$$\langle 0 | T_{uu} | 0 \rangle_{\text{рен}} = -\frac{\pi\alpha}{12L^2} + \frac{1}{24\pi} \left[\frac{C_{,uu}}{C} - \frac{3}{2} \frac{C_{,u}^2}{C^2} \right], \quad (6.210)$$

$$\langle 0 | T_{vv} | 0 \rangle_{\text{рен}} = -\frac{\pi\alpha}{12L^2} + \frac{1}{24\pi} \left[\frac{C_{,vv}}{C} - \frac{3}{2} \frac{C_{,v}^2}{C^2} \right]. \quad (6.211)$$

Член $-R/12\pi m^2$ не дает вклада в эти компоненты тензора энергии-импульса при его подстановке в качестве s в последнее слагаемое в (6.206) (так как $g_{uu} = g_{vv} = 0$), но он приводит к возникновению компонент

$$\begin{aligned} \langle 0 | T_{uv} | 0 \rangle_{\text{рен}} &= \langle 0 | T_{vu} | 0 \rangle_{\text{рен}} = \\ &= \frac{1}{4} C \langle 0 | T_{\alpha}^{\alpha} | 0 \rangle_{\text{рен}} = -RC/96\pi. \end{aligned} \quad (6.212)$$

Отсюда ясно, что член, пропорциональный m^{-2} , дает вклад в аномальный след. Эти результаты находятся в полном согласии с формулой (6.136), где при построении $\langle T_{\mu}^{\nu} [\eta_{\kappa\lambda}] \rangle_{\text{рен}}$ использован исчезающий при нулевой температуре (главный) член в (4.27) — (4.29).

Мы показали, как может быть получен $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}}$ из построенного первоначально $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ путем регуляризации и вычитания $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{DS}$, составленного из соответствующих членов разложения де Витта — Швингера. Практически это было сделано путем построения $G^{(1)}$, регуляризации, вычитания из этой величины соответствующих членов в $G_{DS}^{(1)}$ и последующего дифференцирования для получения тензора энергии-импульса. Вычитания были эквивалентны перенормировке коэффициентов в обобщенном эйнштейновском действии, что свелось к вычитанию всех членов в $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{DS}$ до адиабатического порядка n (в случае n измерений).

Может показаться неестественным нахождение перенормированного $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ путем рассмотрения $G^{(1)}$ и $L_{\text{эфф}}$ вместо уравнений гравитационного поля, в которые $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ входит в качестве правой части. В конце концов можно было бы попытаться включить все бесконечности непосредственно в геометрические члены в левой части обобщенных уравнений Эйнштейна (6.95), перенормируя константы G , Λ , a и b . Но на этом пути возникает одна трудность, которую полезно подчеркнуть для лучшего понимания причины появления конформных аномалий.

Рассмотрим сначала метод размерной регуляризации. Повторяя выкладки разд. 6.2 для произвольного поля, имеющего

$$\begin{aligned} \text{tr } a_0 &= s, \quad \text{tr } a_1 = zR, \\ \text{tr } a_2 &= \omega R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} + x R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + y R^2, \end{aligned} \quad (6.213)$$

получаем

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{расх}} &= - \frac{1}{(4\pi)^{-n/2}} \left[\frac{1}{n-4} + \frac{1}{2} \left(\gamma + \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \right) \right] \times \\ &\times \left\{ - \frac{4sm^4}{n(n-2)} g_{\mu\nu} - \frac{4m^2z}{(n-2)} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + \right. \\ &\left. + 2\omega H_{\mu\nu} + 2x^{(2)} H_{\mu\nu} + 2y^{(1)} H_{\mu\nu} \right\}. \end{aligned} \quad (6.214)$$

Эти члены следует устранить из $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, включая их в соответствующие слагаемые в обобщенном уравнении Эйнштейна, левая часть которого имеет вид (6.52). Сопоставление (6.213) с (6.123) и (6.124) позволяет выразить ω , x , y через коэффициенты аномалий a , b , c , d для поля, преобразующегося по представлению (A, B) группы Лоренца:

$$\begin{aligned} \omega &= - (180)^{-1} (-1)^{2A+2B} a, \\ x &= - (180)^{-1} (-1)^{2A+2B} (b - 2a), \\ y &= - (180)^{-1} (-1)^{2A+2B} \left(d - \frac{1}{3} b + \frac{1}{3} a \right). \end{aligned} \quad (6.215)$$

Выражение (6.214) удобно переписать в виде [72]

$$\begin{aligned}
 \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{расх}} = & -\frac{1}{(4\pi)^{-n/2}} \left[\frac{1}{n-4} + \frac{1}{2} \left(\gamma + \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \right) \right] \times \\
 & \times \left\{ -\frac{4sm^4}{n(n-2)} g_{\mu\nu} - \omega C^{\alpha\beta\gamma\delta} C_{\alpha\beta\gamma\delta} g_{\mu\nu} + 4\omega C_{\mu\alpha\beta\gamma} C^{\alpha\beta\gamma}{}_{\nu} - \right. \\
 & - \frac{4zm^2}{(n-2)} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + 2(4\omega + x) A_{\mu\nu} + {}^{(1)}H_{\mu\nu} \times \\
 & \times \left[y + \frac{1}{3} (\omega + x) \right] \left. \right\} - (4\pi)^{-n/2} (4\omega + x) \left\{ -\frac{{}^{(1)}H_{\mu\nu}}{6(n-1)} + \right. \\
 & \left. + 2{}^{(3)}H_{\mu\nu} \left[\frac{(n-2)}{(n-3)} - \frac{\omega}{4\omega + x} \right] \right\}, \quad (6.216)
 \end{aligned}$$

где *бесследовый тензор* $A_{\mu\nu}$ определен как

$$A_{\mu\nu} = -\frac{n}{4(n-1)} {}^{(1)}H_{\mu\nu} + {}^{(2)}H_{\mu\nu} - \frac{(n-2)(n-4)}{4(n-3)} {}^{(3)}H_{\mu\nu}, \quad (6.217)$$

а ${}^{(3)}H_{\mu\nu}$ представляет собой обобщение (6.140) на случай n -мерного пространства-времени, не являющегося конформно-плоским:

$$\begin{aligned}
 {}^{(3)}H_{\mu\nu} = & \frac{4(n-3)}{(n-2)^2} R_{\mu}{}^{\rho} R_{\rho\nu} - \frac{2n(n-3)}{(n-1)(n-2)^2} R R_{\mu\nu} - \\
 & - \frac{2(n-3)}{(n-2)^2} R_{\rho\sigma} R^{\rho\sigma} g_{\mu\nu} + \frac{(n+2)(n-3)}{2(n-1)(n-2)^2} R^2 g_{\mu\nu} + \\
 & + \frac{4}{(n-2)} C_{\rho\mu\sigma\nu} R^{\rho\sigma}. \quad (6.218)
 \end{aligned}$$

При получении (6.217) использовано также тождество

$$\begin{aligned}
 C_{\alpha\beta\gamma\delta} = & R_{\alpha\beta\gamma\delta} - (n-2)^{-1} (g_{\alpha\delta} R_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma} R_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma} R_{\beta\delta} - g_{\beta\delta} R_{\alpha\gamma}) + \\
 & + (n-1)^{-1} (n-2)^{-1} (g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}) R. \quad (6.219)
 \end{aligned}$$

В конформно-инвариантном случае выражение (6.216) упрощается, поскольку можно использовать условия (6.127). Это приводит к соотношению $\omega + x = -3y$, благодаря которому расходящийся член в (6.216), пропорциональный ${}^{(1)}H_{\mu\nu}$, обращается в нуль. Если затем перейти к безмассовому пределу, то единственными неисчезающими членами, расходящимися при $n \rightarrow 4$, будут $A_{\mu\nu}$ и члены, содержащие тензор Вейля. Первый имеет нулевой след, а след последних порядка $O(n-4)$. При умножении на $(n-4)^{-1}$ получим конечный след. Добавление его к следу (конечных) членов ${}^{(1)}H_{\mu\nu}$ и ${}^{(3)}H_{\mu\nu}$ в (6.216) приводит к известной аномалии следа со знаком минус. Отсюда следует, что при вычитании $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{расх}}$ из бесследового $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ полу-

чим $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}}$, который приобретет аномальный след. Таким образом, нет никаких препятствий для проведения размерной регуляризации и перенормировки $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ в самих уравнениях гравитационного поля.

Но если попытаться повторить эти рассуждения, используя регуляризацию методом расщепления точек, то ситуация окажется иной. В четырехмерном случае левая часть уравнений Эйнштейна имеет вид

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \alpha^{(1)} H_{\mu\nu} + \beta^{(2)} H_{\mu\nu}. \quad (6.220)$$

Здесь тензор $H_{\mu\nu}$ отсутствует, поскольку в случае четырех измерений можно воспользоваться соотношением (6.57). Применяя (6.81) для построения регуляризованного расщеплением точек эффективного действия и выполнив функциональное дифференцирование, чтобы найти $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{расх}}$, можно убедиться в том, что все расходящиеся члены действительно устраняются при перенормировке коэффициентов в обобщенных уравнениях Эйнштейна с левой частью (6.220). Но возникает новая проблема. В пределе безмассового поля с конформной связью получаем [114]

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{расх}} = & - (1/480\pi^2) \left({}^{(2)}H_{\mu\nu} - \frac{1}{3} {}^{(1)}H_{\mu\nu} \right) \left(\gamma + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{2} \mu^2 \sigma \right| \right) + \\ & + (\text{геометрические члены, которые остаются конечными} \\ & \text{при } \sigma \rightarrow 0); \quad (6.221) \end{aligned}$$

здесь еще раз проведено усреднение по направлениям вектора расщепления, а μ — произвольный параметр инфракрасного обрезания.

Первое слагаемое в (6.221) устраняется путем перенормировки α и β в (6.220), но оказывается, что остальные (конечные) члены при этом не исчезают. Однако из (6.53) и (6.54) видно, что след расходящейся части (6.221) пропорционален $\square R$, поэтому устранение первого слагаемого в (6.221) не может дать полную аномалию следа (6.113) — (6.115). Оказывается, что конечные геометрические члены в (6.221), не устраняемые перенормировкой, и дают недостающую часть конформной аномалии. В противоположность этому если перенормировка производится в *действии*, то весь член $W_{\text{расх}}$, включая части, приводящие к конечным членам в (6.221), устраняется из W , что приводит к обычной аномалии следа. Таким образом, результирующий $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}}$ существенно зависит от того, проводится ли перенормировка до или после дифференцирования при получении тензора энергии-импульса.

Более детальное исследование позволяет понять причину этого. Перенормированное гравитационное действие имеет вид

$$S_{\text{грав. рен}} = \int (-g)^{1/2} \{ (16\pi G)^{-1} (R - 2\Lambda) + aR^2 + \\ + bR^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + cR^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} \} d^4x.$$

Здесь a , b и c (не путать с коэффициентами в (6.124)!) не являются строго постоянными при использовании метода расщепления точек. Они содержат расходимости, зависящие от σ , например как σ^{-2} и $\ln \sigma$, которые возникают из (6.81) и являются как функциями x , так и функционалами метрики. При снятии регуляризации и переходе к пределу совпадающих точек зависимость этих величин от x исчезает. Так получается, если выполнить перенормировку для действия. С другой стороны, если требуется перенормировать уравнения гравитационного поля, то, как и в случае размерной регуляризации, снятие регуляризации может проводиться лишь после перенормировки, иначе некоторые члены могут быть потеряны. Следовательно, нужно выполнить функциональное дифференцирование W при $\sigma \neq 0$. Таким образом, W представляет собой нелокальный функционал от метрики, поскольку σ есть би-скаляр $\sigma(x, x')$. Добавочные конечные члены появляются из-за дифференцирования величин, зависящих от σ , причем они оказываются в точности теми геометрическими членами в (6.221) (в случае безмассового конформно-связанного скалярного поля), которые обеспечивают недостающий вклад в аномальный след тензора энергии-импульса.

Чтобы убедиться в этом явно, рассмотрим часть эффективного действия для безмассового поля, обусловленную последним слагаемым в $L_{\text{расх}}$ в формуле (6.81):

$$-(1/32\pi^2) \int (-g)^{1/2} a_2(x, x') \ln \left| \frac{1}{2} m^2 \sigma(x, x') \right| d^4x. \quad (6.222)$$

Здесь m удерживается отличным от нуля для обеспечения инфракрасного обрезания. Если перенормировать действие и положить $\sigma \rightarrow 0$, этот член будет устранен из W , что и приводит к появлению аномального следа, пропорционального $a_2(x, x)$. Но, если сначала выполнить функциональное дифференцирование, мы получим конечный вклад в $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ от σ , равный

$$(1/64\pi^2) a_2(x) g_{\mu\nu}, \quad (6.223)$$

где использовано соотношение [114]

$$\frac{\delta \sigma(x, x')}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} \sigma_{,\mu} \sigma_{,\nu} + O(\sigma^3)$$

и проведено усреднение по σ_μ . Если удерживать этот член в $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}}$, аргументируя это тем, что он конечен и не имеет вида ни одного из тензоров в (6.220), то $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}}$ будет оставаться бесследовым. Но если рассматривать его как часть расходящегося вклада (поскольку он возникает при функциональном дифференцировании расходящегося члена в $L_{\text{расх}}$, то этот член следует отбросить, что приведет к правильному выражению для следа $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}}$. Именно этого требует предписание, сформулированное на с. 204, поскольку вклад (6.223) имеет адиабатический порядок четыре и должен вычитаться.

Заметим, что если согласиться с возможностью появления нелокальных членов в действии даже *после* снятия регуляризации, то, как показывает проведенный расчет, к выражению для следа $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}}$ можно добавить величину, кратную $a_2(x)$. Как было отмечено в работе [67], для полного устранения конформных аномалий необходимо использовать нелокальное действие.

6.5. Другие методы регуляризации

Хотя метод расщепления точек и аналитические методы представляют собой наиболее разработанные способы регуляризации, было предложено и много других методов. В пространствах Робертсона — Уокера эти методы связаны с так называемой схемой адиабатической регуляризации Паркера и Фуллинга [391], которую мы рассмотрим в первую очередь.

Адиабатическая регуляризация по существу представляет собой некорректное название схемы *вычитаний*, которая может включать расщепление точек, размерную регуляризацию или любой другой способ регуляризации. Вместо вычитания адиабатического разложения $G_{DS}^{(1)}$ для получения перенормированной функции Грина, как это было сделано в предыдущем разделе, адиабатическая регуляризация основана на вычитаниях из адиабатических разложений отдельных *мод*. Возможность такого способа действий вытекает из соотношения, обсуждавшегося в разд. 3.6:

$${}^{(A)}G_{DS}^{(1)}(x'', x') = \langle 0^A | \{ \phi(x''), \phi(x') \} 0^A \rangle^{(A)}, \quad (6.224)$$

где левая часть есть разложение $G_{DS}^{(1)}$ вплоть до адиабатического порядка A , а правая часть — разложение до того же порядка среднего значения произведения полей в адиабатическом вакуумном состоянии порядка A . Поскольку правая часть требуется лишь с точностью порядка A , точное решение для поля ϕ можно заменить его разложением $\phi^{(A)}$ с точностью до порядка A , которое можно построить в терминах разложения

по модам u_k^A из разд. 3.5. Таким образом,

$$\begin{aligned} {}^{(A)}G_{DS}^{(1)}(x'', x') &= \langle 0^A | \{ \phi^{(A)}(x''), \phi^{(A)}(x') \} | 0^A \rangle |^{(A)} = \\ &= \int d\bar{\mu}(k) \{ u_k^{(A)}(x'') u_k^{(A)*}(x') + u_k^{(A)*}(x'') u_k^{(A)}(x') \} |^{(A)}, \quad (6.225) \end{aligned}$$

где интегрирование ведется по мере, заданной (5.24). В случае обладающих пространственной кривизной моделей Робертсона — Уокера с $K = \pm 1$ построение адиабатического формализма требует лишь очевидных изменений по сравнению с рассмотренным в разд. 3.5 случаем $K = 0$. Символ $|^{(A)}$ в (6.225) означает, что перекрестные члены от произведений полей, имеющие порядок выше A , должны быть опущены.

Как отмечалось выше, регуляризация и перенормировка методом расщепления точек состоит в вычитании адиабатического разложения из $\mathcal{L}_{\text{эфф}}$, из $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ или из $G^{(1)}$. В последнем случае левая часть (6.225) при $A = n$ выражается в виде ряда де Витта — Швингера и вычитается из $G^{(1)}(x'', x')$. Вместо этого можно было бы работать непосредственно с правой частью, т. е. с суммой по адиабатическим модам, вычитая ее из $G^{(1)}$. Преимущество вычислений непосредственно с адиабатическими модами (а не с адиабатическим разложением точной $G^{(1)}$) состоит в том, что в некоторых случаях удастся добиться взаимного сокращения расходящихся *до интегрирования по модам*; тогда потенциально расходящиеся члены вовсе не появляются в расчетах и все интегралы оказываются конечными. Таким образом, никакой явной регуляризации не потребуются. Точки x'' и x' могут быть с самого начала приняты совпадающими. (Если нужно вычислить $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, то дифференцирование $G^{(1)}(x'', x')$ должно быть выполнено прежде, чем $x'', x' \rightarrow x$.)

Для иллюстрации применения метода адиабатической регуляризации рассмотрим безмассовое скалярное поле с конформной связью в двумерной модели Робертсона — Уокера с топологией R^2 [67, 71]. Следуя трактовке, данной в разд. 4.1, 4.2 и используя конформный вакуум, получим

$$\langle 0 | T_{uu} | 0 \rangle = \langle 0 | T_{vv} | 0 \rangle = \int \frac{\partial k_k}{\partial u} \frac{\partial u_k^*}{\partial u} dk = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty k dk, \quad (6.226)$$

$$\langle 0 | T_{uv} | 0 \rangle = \langle 0 | T_{vu} | 0 \rangle = 0, \quad (6.227)$$

где заранее взяты совпадающие точки в надежде на то, что интегралы по модам будут сходящимися.

В двумерном случае адиабатическое приближение для мод описывается выражением (см., например, (3.86))

$$u_k^{(A)}(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{ikx} \chi_k^{(A)}(\eta), \quad (6.228)$$

где функции $\chi_k^{(A)}$ определены формулой (3.102), в которой следует выполнить разложение до порядка A . Подставляя (6.228) в (6.225) и выполняя дифференцирование, получаем

$$\langle 0^A | T_{uu} | 0^A \rangle^{(A)} = \frac{1}{16\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{W_k^{(A)}} \left[(W_k^{(A)} + k)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\dot{W}_k^{(A)}}{W_k^{(A)}} \right)^2 \right]^{(A)}, \quad (6.229)$$

$$\langle 0^A | T_{vv} | 0^A \rangle^{(A)} = \frac{1}{16\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{W_k^{(A)}} \left[(W_k^{(A)} - k)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\dot{W}_k^{(A)}}{W_k^{(A)}} \right)^2 \right]^{(A)}, \quad (6.230)$$

$$\langle 0^A | T_{uv} | 0^{(A)} \rangle = \langle 0^A | T_{vu} | 0^A \rangle^{(A)} = \frac{Cm^2}{16\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{W_k^{(A)}} \Big|^{(A)}. \quad (6.231)$$

В соответствии с принятым методом адиабатического вычитания (основанном на стремлении получить тот же результат, что и с помощью перенормировки эффективного лагранжиана), вычтем (6.229) — (6.231) при $A = 2$ из соответствующих величин в (6.226), (6.227), находя $W_k^{(2)}$ с помощью итераций (см. с. 74). Получив для $W_k^{(2)}$ выражение

$$W_k^{(2)} = \omega_k - \frac{\dot{C}m^2}{8\omega_k^3} + \frac{5\dot{C}^2m^4}{32\omega_k^5}; \quad (6.232)$$

и подставляя его в (6.229) и (6.230), найдем

$$\begin{aligned} 0^{A=2} | T_{uu} | 0^{A=2} \rangle^{(2)} &= \langle 0^{A=2} | T_{vv} | 0^{A=2} \rangle^{(2)} = \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty \left[\omega_k^2 + \frac{k^2}{\omega_k^2} - \frac{1}{8} \frac{\dot{C}m^2}{\omega_k^3} + \frac{1}{8} \frac{\dot{C}k^2m^2}{\omega_k^5} + \frac{7}{32} \frac{\dot{C}^2m^4}{\omega_k^5} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{32} \frac{\dot{C}^2k^2m^4}{\omega_k^7} \right] dk. \end{aligned} \quad (6.233)$$

Вычитание этого выражения из (6.226) дает

$$\begin{aligned} \langle T_{uu} \rangle_{\text{рен}} &= \langle T_{vv} \rangle_{\text{рен}} = -\frac{1}{8\pi} \int_0^\infty \frac{(\omega_k - k)^2}{\omega_k} dk + \\ &+ \frac{1}{64\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\dot{C}m^2}{\omega_k^3} - \frac{\dot{C}k^2m^2}{\omega_k^5} - \frac{7}{4} \frac{\dot{C}^2m^4}{\omega_k^5} + \frac{5}{4} \frac{\dot{C}^2k^2m^4}{\omega_k^7} \right) dk, \end{aligned} \quad (6.234)$$

где в окончательном результате следует перейти к пределу при $m \rightarrow 0$. Как и ожидалось, оба интеграла оказываются

конечными. Первый интеграл обращается в нуль при $m \rightarrow 0$, а второй равен

$$\langle T_{uu} \rangle_{\text{рен}} = \langle T_{vv} \rangle_{\text{рен}} = \frac{1}{96\pi} \left(\frac{\dot{C}}{C} - \frac{3}{2} \frac{\dot{C}^2}{C^2} \right) = \theta_{uu} = \theta_{vv}, \quad (6.235)$$

где $\theta_{\mu\nu}$ определено формулой (6.137).

Подобным же образом находим

$$\begin{aligned} \langle T_{uv} \rangle_{\text{рен}} = \langle T_{vu} \rangle_{\text{рен}} &= -\frac{C\dot{C}m^4}{64\pi} \int_0^\infty \frac{dk}{\omega_k^5} + \frac{5C\dot{C}^2m^6}{256\pi} \int_0^\infty \frac{dk}{\omega_k^7} = \\ &= \frac{1}{96\pi} \left(\frac{\dot{C}}{C} - \frac{\dot{C}^2}{C^2} \right) = -\frac{R}{48\pi} g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (6.236)$$

Следовательно,

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}} = \theta_{\mu\nu} - (48\pi)^{-1} R g_{\mu\nu}, \quad (6.237)$$

что представляет собой частный случай выражений (6.136) и (6.210)–(6.212), полученных другими методами. Аналогичные вычисления для четырехмерного пространства были проведены Банчем [69, 70] и привели к согласию с результатом (6.141).

В большинстве случаев точные выражения для мод оказываются слишком сложными, чтобы можно было уничтожить потенциально расходящиеся члены до суммирования по модам. В таких случаях должна применяться явная регуляризация. Если воспользоваться методом расщепления точек или размерной регуляризацией, то по существу мы возвращаемся к технике, описанной в предшествовавших разделах. Однако преимуществом выражения (6.225) является то, что оно позволяет применять различные методы регуляризации заранее зная, что окончательный результат будет совпадать с результатом перенормировки констант связи в обобщенном уравнении Эйнштейна. При этом регуляризация используется лишь для удобства расчетов с величиной, о конечности которой известно заранее. В частности, можно прибегать к нековариантной регуляризации, которая представляет удобства в вычислительном отношении по сравнению с ковариантными схемами. Например, Биррелл [36] применил экспоненциальное обрезание $e^{-\alpha k}$, что позволило сильно упростить вычисления, а Банч [73] — нековариантную форму размерной регуляризации при исследовании расходимостей $\langle 0^A | T_{\mu\nu} | 0^A \rangle$. С другой стороны, Ху [303] использовал форму записи (6.225) для получения формальной параметризации $\langle 0^A | T_{\mu\nu} | 0^A \rangle$ с помощью одного простого логарифмически расходящегося интеграла; такой метод ранее применялся также в пространствах типа Бианки I [302] на основе формализма, предложенного Паркером, Фуллингем и Ху [391].

Наконец, схема адиабатической регуляризации особенно удобна при проведении численных расчетов [36], где можно действовать следующим образом. Продифференцировав выражение (6.225) и получив тензор энергии-импульса, в пределе совпадающих точек будем иметь

$$\langle 0^A | T_{\mu\nu}(x) | 0^A \rangle^{(A)} = \int d\bar{\mu}(k) T_{\mu\nu}^{(A)}(\mathbf{k}; x), \quad (6.238)$$

где величина $T_{\mu\nu}^{(A)}(\mathbf{k}; x)$ определена через моды $u_{\mathbf{k}}^{(A)}(x)$. Аналогично среднее значение точного тензора энергии-импульса в интересующем нас пространстве-времени можно записать в виде (например, (6.226), (6.227))

$$\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle = \int d\mu(k) T_{\mu\nu}(\mathbf{k}; x), \quad (6.239)$$

где тензор $T_{\mu\nu}(\mathbf{k}, x)$ задан с помощью точных мод $u_{\mathbf{k}}(x)$. Тогда перенормированное среднее значение равно

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}} &= \langle T_{\mu\nu}(x) \rangle - \langle 0^A | T_{\mu\nu}(x) | 0^A \rangle^{(A)} = \\ &= \int d\bar{\mu}(k) [T_{\mu\nu}(\mathbf{k}, x) - T_{\mu\nu}^{(A)}(\mathbf{k}, x)], \end{aligned} \quad (6.240)$$

причем в n -мерном пространстве-времени $A = n$. Если известны моды и их производные (либо в виде аналитических выражений, либо из численного решения уравнения поля), то величина $T_{\mu\nu}(\mathbf{k}; x)$ может быть рассчитана численно без особых затруднений; величина же $T_{\mu\nu}^{(A)}$ при $A = 2$ или 4 вообще вычисляется элементарно. Поскольку потенциально расходящиеся члены в (6.240) должны взаимно уничтожаться по построению этого выражения, результирующий интеграл конечен и может быть вычислен с помощью прямых квадратурных методов. Численный расчет с использованием методов размерной регуляризации или расщепления точек оказывается невозможным ввиду невозможности численного перехода к пределу $n \rightarrow n_0$ (физической размерности) или $x'' \rightarrow x'$ соответственно.

С адиабатической регуляризацией тесно связаны n -волновая регуляризация и метод Паули — Вилларса. Метод n -волновой регуляризации был предложен Зельдовичем и Старобинским [503] как вариант схемы Паули — Вилларса; как было показано Паркером и Фуллингем [390], он эквивалентен адиабатической регуляризации. Здесь мы ограничимся обсуждением собственно метода Паули — Вилларса.

Этот прием в течение долгого времени использовался в теории взаимодействующих полей в пространстве Минковского в качестве метода регуляризации [393]. Основная идея состоит в добавлении к лагранжиану интересующего нас физического

поля вкладов от дополнительных фиктивных полей, и такой подгонке параметров теории, чтобы расходящиеся выражения, обусловленные фиктивными полями, в точности сокращались бы с расходимостями, связанными с физическим полем, делая теорию конечной. Для устранения всех расходимостей может потребоваться несколько фиктивных полей. Чтобы избежать появления фиктивных частиц в начальном и конечном состояниях системы (и, следовательно, нарушения унитарности), в конце вычисления регуляризация должна сниматься путем устремления масс фиктивных частиц к бесконечности. Расходимости, которые могут при этом снова появиться, устраняются с помощью перенормировки, как и в других схемах устранения бесконечностей. Тогда потенциально расходящиеся члены становятся функциями масс фиктивных частиц. Если некоторые из фиктивных скалярных полей антикоммутируют, а не коммутируют (либо в случае спинорных полей коммутируют, а не антикоммутируют), то их вклад в тензор энергии импульса становится отрицательным и они сокращаются с расходимостями противоположного знака от физического поля.

Этот метод применялся Виленкиным [477] при расчете аномалии следа для скалярного поля с конформной связью и Бернардом и Дунканом [34], детально обсуждавшим проблему регуляризации тензора энергии-импульса. Идея использования приближения больших масс для изоляции и вычитания чисто геометрических расходящихся членов в $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ по существу совпадает с той, которая используется в адиабатическом подходе и при использовании разложения де Витта — Швингера по степеням m^{-1} . Таким образом, регуляризация Паули — Вилларса в принципе не отличается от других методов, используемых для проведения перенормировки [76].

Разложение де Витта — Швингера (6.39) в пределе совпадающих точек $x = x'$ ($\sigma = 0$) приводит к следующему выражению для эффективного лагранжиана:

$$L_{\text{эфф}} = \frac{1}{2} i (4\pi)^{-n/2} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) m^{n-2j} \int_0^{\infty} (i\bar{s})^{j-1-n/2} e^{-i\bar{s}} d\bar{s}. \quad (6.241)$$

где проведена замена переменной интегрирования $\bar{s} = m^2 s$. Здесь первые $n/2$ членов имеют ультрафиолетовые расходимости. Если добавить к $L_{\text{эфф}}$ вклады от фиктивных скалярных регуляризующих полей в определенной комбинации, эти расходимости можно формально уничтожить. В двумерном случае, например, требуются три дополнительных поля: коммутирующее поле с массой $(2M^2 - m^2)^{1/2}$ и два антикоммутирующих поля, каждое с массой M . (В конце вычисления полагаем $M \rightarrow \infty$.) Коэффициент в расходящемся интеграле лидирующего порядка

(квадратичного) в (6.241) тогда равен $a_0 m^2 + a_0(2M^2 - m^2) - 2a_0 M^2 = 0$, а коэффициент перед следующим (логарифмически) расходящимся интегралом равен $a_0 + a_0 - 2a_0 = 0$.

В четырехмерном случае необходимо ввести пять дополнительных скалярных полей, например, два антикоммутирующих с массами $(M^2 + m^2)^{1/2}$, одно с массой $(4M^2 + m^2)^{1/2}$ и два коммутирующих с массами $(3M^2 + m^2)^{1/2}$. Нетрудно проверить, что при таком соотношении происходит точное сокращение в выражении (6.241) членов, содержащих a_0 , a_1 и a_2 .

Хотя описанная процедура формально уничтожает ультрафиолетово-расходящиеся члены в (6.241), замена переменной $\bar{s} = m^2 s$, строго говоря, не является законной для расходящихся членов с $j = 0$ и 1. В самом деле, если сохранить переменную s , полный интеграл с учетом вклада регуляризующих полей для $n = 2$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty (is)^{j-2} [e^{-im^2 s} + e^{-i(2M^2 - m^2)s} - 2e^{-iM^2 s}] ds = \\ & = -4 \int_0^\infty (is)^{j-2} e^{-iM^2 s} \sin^2 \left[\frac{1}{2} (M^2 - m^2) s \right] ds. \quad (6.242) \end{aligned}$$

Этот интеграл легко вычислить. Для $j > 1$ он стремится к нулю при $M \rightarrow \infty$. Для $j = 0, 1$ в пределе $M \rightarrow \infty$ он расходится. Эти расходимости были потеряны при замене переменной интегрирования на \bar{s} . Появления таких расходимостей и следует ожидать при снятии регуляризации; они устраняются перенормировкой обобщенного эйнштейновского действия (или уравнений гравитационного поля) обычным образом. В конце этого раздела будет дан пример практических вычислений, в котором зависящие от M расходимости будут представлены в виде явных выражений.

Полезно, однако, сначала проследить более детально, как появляются конформные аномалии в методе Паули — Вилларса. След классического выражения, для $T_{\mu\nu}$, в случае конформной связи ($\xi = \xi(n)$) равный $m^2 \phi^2$, очевидно, обращается в нуль при $m = 0$. Но $\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle$ не обращается в нуль, поскольку в эту величину следует включить вклады регуляризующих полей, для которых $M \rightarrow \infty$, а не к нулю. Так в двумерном случае имеем

$$\langle 0 | T_{\mu}^{\mu} | 0 \rangle = M^2 G_{2M^2}^{(1)}(x, x) - M^2 G_M^{(1)}(x, x), \quad (6.243)$$

где $m = 0$ и использовано соотношение $G^{(1)}(x, x) = 2\langle 0 | \phi^2(x) | 0 \rangle$. Используя разложение де Витта — Швингера для $G^{(1)}$,

находим

$$\langle 0 | T_{\mu}^{\mu} | 0 \rangle = (M^2/2\pi) \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) \int_0^{\infty} (is)^{j-1} [e^{-2iM^2s} - e^{-iM^2s}] i ds. \quad (6.244)$$

Рассматривая этот интеграл, так же как (6.242), нетрудно установить, что расходящимся при $M \rightarrow \infty$ является лишь член a_0 . Эта расходимость устраняется с помощью перенормировки космологической постоянной Λ в (6.220). Вычислив остальные интегралы, находим, что при $M \rightarrow \infty$ все члены разложения обращаются в нуль, кроме члена, содержащего a_1 , что дает

$$\langle 0 | T_{\mu}^{\mu} | 0 \rangle_{\text{рен}} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} -a_1(x)/4\pi \quad (6.245)$$

в согласии с (6.121).

В четырехмерном случае аналогично находим, что единственным неисчезающим членом после перенормировки и снятия регуляризации ($M \rightarrow \infty$) является член, пропорциональный m^{-2} , в $G^{(1)}$, от которого остается известное выражение $-a_2/16\pi^2$. В пространствах нечетной размерности членов, пропорциональных m^{-2} , в $G_{DS}^{(1)}$ нет, поэтому аномалия следа не возникает.

В качестве иллюстрации использования метода Паули — Вилларса в практических вычислениях приведем пример, рассмотренный Бернардом и Дунканом [34]. Этот пример уже обсуждался в разд. 3.4 в связи с рождением частиц.

Рассмотрим массивное скалярное поле с конформной связью в двумерном пространстве Робертсона — Уокера с метрикой, определяемой соотношениями (3.83) и (3.84). В области $\eta \rightarrow -\infty$ отклонение метрики от плоской можно считать малым. Если выбрать $A = 1 + b/2$, $B = b/2$, то конформный фактор

$$C(\eta) = 1 + \frac{1}{2} b (1 + \text{th} \rho \eta) \approx 1 + b e^{2\rho \eta} \quad (6.246)$$

при $\rho \eta \rightarrow -\infty$. Величину ρ^{-1} можно рассматривать как адиабатический параметр T , введенный в разд. 3.5.

С точностью до первого порядка по величине $b e^{2\rho \eta}$ моды (3.87) сводятся к

$$u_k^{\text{in}} \approx (4\pi\omega_{\text{in}})^{-1/2} e^{ikx - i\omega_{\text{in}}\eta} \left[1 - \frac{m^2 b e^{2\rho \eta}}{4\rho^2 (1 - i\omega_{\text{in}}/\rho)} \right], \quad (6.247)$$

где теперь $\omega_{\text{in}}^2 = k^2 + m^2$.

Из соотношения (3.190), полагая $n = 2$, $\xi = 0$, находим

$$T_{\mu\nu} = \phi_{;\mu}\phi_{;\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\sigma\rho} \phi_{;\sigma}\phi_{;\rho} + \frac{1}{2} m^2 g_{\mu\nu} \phi^2. \quad (6.248)$$

Воспользовавшись теперь формулой (2.43) (которая остается верной и в искривленном пространстве-времени) и подставляя решения (6.247), в первом порядке получаем

$$\langle \text{in}, 0 | T_{\eta\eta} | 0, \text{in} \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (k^2 + m^2)^{1/2} dk + \frac{m^2 b e^{2\rho\eta}}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{(k^2 + m^2)^{1/2}}, \quad (6.249)$$

$$\begin{aligned} \langle \text{in}, 0 | T_{xx} | 0, \text{in} \rangle = & \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (k^2 + m^2)^{1/2} dk - \frac{m^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{(k^2 + m^2)^{1/2}} - \\ & - \frac{m^2 b e^{2\rho\eta}}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{(k^2 + m^2)^{1/2}} + \frac{m^4 b e^{2\rho\eta}}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{(\rho^2 + k^2 + m^2)(k^2 + m^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (6.250)$$

Эти выражения содержат обычные квадратичные и логарифмические расходимости, для уничтожения которых нужно ввести регуляризующие поля. При добавлении вкладов от этих полей к выписанным интегралам получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [(k^2 + m^2)^{1/2} + (k^2 + 2M^2 - m^2)^{1/2} - 2(k^2 + M^2)^{1/2}] dk = \\ = \frac{1}{2} m^2 \ln [(2M^2 - m^2)/m^2] + M^2 \ln [M^2/(2M^2 - m^2)], \end{aligned} \quad (6.251)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [m^2 (k^2 + m^2)^{-1/2} + (2M^2 - m^2) (k^2 + 2M^2 - m^2)^{-1/2} - \\ - 2M^2 (k^2 + M^2)^{-1/2}] dk = m^2 \ln [(2M^2 - m^2)/m^2] + \\ + 2M^2 \ln [M^2/(2M^2 - m^2)] \end{aligned} \quad (6.252)$$

для слагаемых, которые раньше имели квадратичные и логарифмические расходимости соответственно. Подставляя выражения (6.251) и (6.252) в (6.249) и (6.250) (вместе с соответствующими выражениями для регуляризующих полей), с точностью до членов рассматриваемого порядка получаем

$$\langle \text{in}, 0 | T_{\eta\eta} | 0, \text{in} \rangle = (C/8\pi) \{ m^2 \ln [(2M^2 - m^2)/m^2] + 2M^2 \ln [M^2/(2M^2 - m^2)] \}, \quad (6.253)$$

$$\begin{aligned} \langle \text{in}, 0 | T_{xx} | 0, \text{in} \rangle = - (C/8\pi) \{ m^2 \ln [(2M^2 - m^2)/m^2] + \\ + 2M^2 \ln [M^2/(2M^2 - m^2)] \} + f(m^2) + f(2M^2 - m^2) - 2f(M^2), \end{aligned} \quad (6.254)$$

где

$$f(m^2) = \frac{m^4 b e^{2\rho\eta}}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{(k^2 + \rho^2 + m^2)(k^2 + m^2)^{1/2}} = \\ = \frac{m^4 b e^{2\rho\eta}}{8\pi\rho (m^2 + \rho^2)^{1/2}} \ln \left[\frac{(m^2 + \rho^2)^{1/2} + \rho}{(m^2 + \rho^2)^{1/2} - \rho} \right]. \quad (6.255)$$

Замечая, что $\langle T_{\eta x} \rangle = \langle T_{x\eta} \rangle = 0$, можем записать эти выражения в общем виде

$$\langle \text{in}, 0 | T_{\mu\nu} | 0, \text{in} \rangle = (g_{\mu\nu}/8\pi) \{ m^2 \ln [(2M^2 - m^2)/m^2] + \\ + 2M^2 \ln [M^2/(2M^2 - m^2)] \} + \eta_{\mu 1} \eta_{\nu 1} [f(m^2) + \\ + f(2M^2 - m^2) - 2f(M^2)]. \quad (6.256)$$

Первое слагаемое в правой части (6.256) поглощается перенормировкой космологической постоянной Λ в уравнении Эйнштейна (оно расходится при $M \rightarrow \infty$). Перенормировки, связанной с a_1 , в эффективном лагранжиане не требуется, так как это слагаемое дает вклад в уравнение гравитационного поля, пропорциональный тензору Эйнштейна, который тождественно равен нулю в двумерном случае. Остающееся слагаемое в (6.256) конечно при $M \rightarrow \infty$ и в этом пределе легко вычисляется. В результате имеем

$$\langle \text{in}, 0 | T_{\mu\nu} | 0, \text{in} \rangle_{\text{рен}} = -\eta_{\mu 1} \eta_{\nu 1} \frac{b e^{2\rho\eta}}{4\pi} \times \\ \times \left[m^2 - \frac{2}{3} \rho^2 - \frac{m^4}{2\rho (m^2 + \rho^2)^{1/2}} \ln \left(\frac{(m^2 + \rho^2)^{1/2} + \rho}{(m^2 + \rho^2)^{1/2} - \rho} \right) \right]. \quad (6.257)$$

Заметим, что при $m=0$ след выражения (6.257) с точностью до низшего порядка по величине $b e^{2\rho\eta}$ дает правильную величину конформной аномалии:

$$\langle \text{in}, 0 | T_{\mu}^{\mu} | 0, \text{in} \rangle_{\text{рен}} = -b e^{2\rho\eta} \rho^2 / 6\pi \approx -R/24\pi. \quad (6.258)$$

Недостатком метода регуляризации Паули—Вилларса является необходимость работать с массивными полями (пусть даже в некотором приближении). Во многих вычислениях уравнения для безмассового поля оказываются значительно более простыми, чем соответствующие уравнения для массивных полей.

6.6. Физический смысл тензора энергии-импульса

Огромные усилия, затраченные на разработку методов расчета $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}}$, заставляют нас обратиться к более подробному обсуждению физического смысла этой величины. В предшеству-

ющих разделах показано, каким образом с помощью различных математических приемов можно из формально расходящейся величины $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ получить некоторый остаток, который, по крайней мере в явно рассмотренных случаях, может серьезно претендовать на роль правой части в уравнении гравитационного поля.

Несмотря на физическую осмысленность получаемых результатов, метод построения $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}}$ с помощью бесконечной перенормировки постоянных гравитационного взаимодействия остается открытым для критики. Интеграл де Витта — Швингера по собственному времени, разложение G_F по обратным массам, а также многие более формальные манипуляции, проделанные в разд. 6.1 и 6.2 (такие, как операции с $\text{tr} \ln G_F$), являются в лучшем случае плохо определенными для операторов гиперболического типа, а в некоторых случаях, возможно, и вовсе не существуют. Строго доказанных результатов имеется довольно мало.

Помимо этих математических проблем возникает также вопрос, имеет ли вообще смысл полуклассическая теория. Как следует измерять $\langle T_{\mu\nu} \rangle$? Когда справедливо полуклассическое приближение? Если $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ можно измерить лишь гравитационными методами (т. е. через вклад этой величины в уравнения поля), то можно ли пренебрегать вкладами высших порядков (двухгравитонными и т. д.)? Каково отношение поправок высших порядков к эвристически ожидаемому результату, что $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{(2)}$ должно быть много меньше, чем $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, если эта последняя величина правильно аппроксимирует некоторое среднее распределение квантового тензора энергии-импульса? В каком случае можно, и можно ли вообще хотя бы приближенно описывать «обратную реакцию» (т. е. изменение гравитационного поля, за счет индуцируемого гравитацией $\langle T_{\mu\nu} \rangle$) с помощью $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}}$, вычисленного на однопетлевом уровне? Опасения по этому поводу высказывались многими авторами (см., например, [186]). Ответить на многие из этих вопросов могла бы точная квантовая теория гравитации (пока не существующая), по отношению к которой полуклассическая теория являлась бы некоторым приближением.

Один из подходов к проблеме установления физического смысла $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ состоит в том, чтобы вообще отказаться от перенормировок и поставить вопрос о том, каким критериям должен удовлетворять $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ в полуклассической теории. Если такие критерии будут слишком ограничительными, то эта величина может вовсе не существовать, если слишком широкими — она может оказаться не единственной.

Подход, целью которого является определение единственного ненулевого $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ путем наложения чисто физических требований («аксиом»), был предложен Кристенсеном [112] и

затем успешно развит в работах Уолда [482—484], послуживших существенным подкреплением программы перенормировок. В слабой системе аксиом Уолда на любой физически осмысленный объект $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ предлагается наложить по крайней мере следующие четыре разумных условия:

- 1) ковариантное сохранение,
- 2) выполнение условия причинности,
- 3) стандартные результаты для «недиагональных» элементов,
- 4) обычные свойства в пространстве Минковского.

Первое условие представляет собой требование выполнения соотношения (6.142), необходимого для того, чтобы $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ можно было ввести в правую часть уравнения гравитационного поля, левая часть которого имеет равную нулю дивергенцию.

Аксиома причинности содержит некоторую тонкость. Точная формулировка такова: «для фиксированного *in*-состояния значение $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ в точке *p* пространства-времени зависит от геометрии пространства-времени только в причинном прошлом точки *p*». Под этим понимается, что изменение метрической структуры пространства вне светового конуса прошлого с вершиной в точке *p* не должно сказываться на $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ до тех пор, пока квантовое состояние поля в отдаленном прошлом остается прежним. (Можно представить себе некоторые изменения геометрии вне светового конуса прошлого, которые влияют на фоковское пространство, построенное на базе *in*-мод. Но это не допускается.) Соответствующее обращенное во времени утверждение применимо к *out*-состояниям и возможным изменениям геометрии вне светового конуса будущего.

Третье условие состоит просто в том, что величина $\langle \Phi | T_{\mu\nu} | \Psi \rangle$ должна быть заведомо конечной для ортогональных состояний, $\langle \Phi | \Psi \rangle = 0$, причем в этом случае ее значения должны совпадать с формальным результатом. Под четвертым условием понимается, что в пространстве Минковского справедлива процедура нормального упорядочения (разд. 2.4).

Теперь можно доказать важное утверждение: если тензор $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ удовлетворяет первым трем из приведенных четырех условий, то он является единственным с точностью до некоторого сохраняющегося тензора.

Доказательство состоит в следующем (подробности см. в [482]). Если $T_{\mu\nu}$ и $\tilde{T}_{\mu\nu}$ — два (перенормированных) оператора тензора энергии-импульса, удовлетворяющие первым трем условиям, то нам нужно показать, что среднее значение оператора

$$U_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \tilde{T}_{\mu\nu} \quad (6.259)$$

есть локальный сохраняющийся тензор.

Заметим сначала, что при выполнении третьего условия матричный элемент $U_{\mu\nu}$ между ортогональными состояниями должен быть равен нулю (поскольку $\langle \Phi | T_{\mu\nu} | \Psi \rangle = \langle \Phi | \hat{T}_{\mu\nu} | \Psi \rangle$). Далее, полагая $|\Pi_{\pm}\rangle = 2^{-1/2}(|\Psi\rangle + |\Phi\rangle)$, где $|\Phi\rangle$ и $|\Psi\rangle$ — ортонормированные состояния, находим

$$\langle \Pi_+ | U_{\mu\nu} | \Pi_- \rangle = 0$$

и, значит,

$$\langle \Psi | U_{\mu\nu} | \Psi \rangle - \langle \Phi | U_{\mu\nu} | \Phi \rangle = 0, \quad \forall \Psi, \Phi, \quad (6.260)$$

т. е. все диагональные элементы (средние значения) равны. Это означает, что $U_{\mu\nu}$ кратен единичному оператору:

$$U_{\mu\nu} = u_{\mu\nu} I, \quad (6.261)$$

где $u_{\mu\nu}$ — обычное c -числовое тензорное поле.

Теперь можно убедиться в том, что $u_{\mu\nu}$ является локальным тензором, ибо среднее значение $U_{\mu\nu}$ в некотором нормированном in-состоянии равно

$$\langle \text{in} | U_{\mu\nu}(p) | \text{in} \rangle = u_{\mu\nu}(p). \quad (6.262)$$

То же самое должно быть верно и для out-состояний:

$$\langle \text{out} | U_{\mu\nu}(p) | \text{out} \rangle = u_{\mu\nu}(p). \quad (6.263)$$

Поскольку второе условие требует, чтобы тензор $u_{\mu\nu}(p)$ в (6.262) зависел лишь от геометрии в причинном прошлом точки p , а $u_{\mu\nu}(p)$ в (6.263) подобным же образом ограничен геометрией причинного будущего, эти две величины могут совпадать лишь в том случае, если они зависят от геометрии только в пересечении световых конусов прошлого и будущего, т. е. в самой точке p . Следовательно, $u_{\mu\nu}(p)$ есть локальный тензор в точке p .

Наконец, благодаря первому условию локальный тензор $u_{\mu\nu}$ должен быть сохраняющимся:

$$u^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (6.264)$$

Таким образом, тензор $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ является единственным с точностью до локального сохраняющегося тензора. Однако любой сохраняющийся тензор, зависящий только от локальной геометрии, относится к левой части уравнений гравитационного поля и его следует рассматривать как величину, описывающую динамику гравитационного поля, а не приписывать квантовому полю.

В теории перенормировок как раз имеется свобода в выборе локального сохраняющегося тензора (например $^{(1)}H_{\mu\nu}$), который можно ввести в правую часть уравнений поля. Возникающая неоднозначность может быть разрешена путем эксперимен-

тального измерения коэффициента при этом члене в уравнении. С другой стороны, можно попытаться дать обоснование тому, что такого члена не должно быть из физических соображений (т. е. коэффициент при нем равен нулю). Так Уолд [482] предложил пятое условие, основанное на критерии устойчивости гравитационной динамики, которое вместе с четвертым условием однозначно фиксирует $u_{\mu\nu} = 0$. В настоящее время это условие кажется сомнительным, о чем будет сказано ниже.

Возникает вопрос: удовлетворяет ли описанная в предыдущих разделах программа перенормировок условиям Уолда? Если да, то имеются все основания верить полученным результатам независимо от того, рассматривается ли отбрасывание бесконечностей как законная перенормировка гравитационных констант связи или же как специально вводимое предположение. В особенности это важно для метода расщепления точек, поскольку в этом случае невозможно последовательно осуществить перенормировку $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ в уравнениях гравитационного поля и приходится (основываясь на результатах перенормировки эффективного действия) отбрасывать некоторый член, чтобы получить полную конформную аномалию (см. обсуждение на с. 214). Более того, процедура усреднения по направлениям вектора расщепления t_μ до перенормировки вызывает возражения, поскольку однозначно определенной меры в пространстве направлений не существует — выбирается лишь наиболее «естественная» мера.

Отправной точкой метода расщепления точек является разложение де Витта — Швингера для $G^{(1)}(x, x')$. Если это разложение существует, то из соотношения (3.141) можно заключить, что в четырехмерном случае оно должно иметь следующую общую форму:

$$S(x, x') = (U/\sigma) + V \ln \sigma + W, \quad (6.265)$$

где $U = U(x, x')$ и

$$V(x, x') = \sum_{l=0}^{\infty} V_l(x, x') \sigma^l, \quad W(x, x') = \sum_{l=0}^{\infty} W_l(x, x') \sigma^l. \quad (6.266)$$

Функция Грина, представленная в такой форме, носит название элементарного решения Адамара в связи с исчерпывающей работой Адамара [262] о структуре сингулярностей эллиптических и гиперболических уравнений второго порядка. Вопрос о том, когда функция $G^{(1)}(x, x') = \langle 0 | \{ \phi(x), \phi(x') \} | 0 \rangle$ имеет вид элементарного решения Адамара (т. е. для каких пространств и векторов состояний $|0\rangle$), остается открытым, но обычно предполагают, что она имеет такой вид для широкого класса пространств и интересующих нас граничных условий.

В частности, Фуллинг, Свини и Уолд [226] доказали, что если $G^{(1)}$ имеет структуру сингулярностей типа Адамара в некоторой открытой окрестности поверхности Коши, то она имеет такую форму всюду. Следствием этого является утверждение, что если в прошлом от некоторой поверхности Коши пространство-время плоское, то функция $G^{(1)}$, вычисленная в состоянии *in*-вакуума, имеет форму решения Адамара всюду, поскольку она заведомо имеет такую форму в обычной квантовой теории поля в плоском пространстве.

Коэффициенты в (6.266) можно найти, подставляя (6.265) в уравнение поля и решая его методом последовательных приближений [5, 158, 227]. С помощью этой процедуры V определяется однозначно. Более того, если задать $W_0(x, x')$, то и W будет определена однозначно. Это доопределение можно рассматривать как наложение граничного условия на поле, и оно однозначно характеризует функцию $S(x, x')$. Общая нормировка затем фиксирует U .

Решение Адамара удобно записать в следующем несколько измененном виде:

$$S(x, x') = [2/(4\pi)^2] \Delta^{1/2} [-(2/\sigma) + v \ln \delta + w], \quad (6.267)$$

где величина $\Delta(x, x')$ определена соотношением (3.139), а для v и w имеются разложения, аналогичные (6.266). При разложении решения (6.267) по обратным степеням массы воспроизводится разложение де Витта — Швингера функции Грина $G_{DS}^{(1)}$ (3.141), которое было использовано в качестве основы программы перенормировок. В четырехмерном случае из $G^{(1)}(x, x')$ вычитали первые три члена разложения по обратным степеням массы (члены до четвертого адиабатического порядка) функции $G_{DS}^{(1)}$. Но для выяснения совместности с аксиомами Уолда предпочтительнее иметь дело не с оборванным разложением по обратной массе, а с точной формой Адамара (6.267). Особенно это необходимо в безмассовом пределе, когда коэффициенты разложения де Витта — Швингера для w расходятся (поскольку это разложение по m^{-1}). Ниже мы рассмотрим связь между перенормировками, основанными на $S(x, x')$ и на $G_{DS}^{(1)}(x, x')$.

Функция Грина $G^{(1)}(x, x')$ является основной величиной, из которой можно построить $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$ путем дифференцирования. При проведении практических вычислений будем предполагать, что $G^{(1)}$ имеет форму решения Адамара. Функция $G^{(1)}(x, x')$, согласно своему определению, должна быть симметричной по x и x' и, следовательно, удовлетворять уравнению поля по обоим переменным. Для решения Адамара (6.267) можно показать [226], что Δ и v действительно симметричны

в общем случае. Но для ω такого заключения сделать нельзя, поскольку эта несингулярная часть определяется заданием $\omega_0(x, x')$ и может изменяться в зависимости от граничных условий. Таким образом, хотя для $G^{(1)}(x, x')$ функция $\omega(x, x')$ должна быть симметричной по построению, в общем случае это не так. Поэтому мы приходим к заключению, что в общем случае функция $S(x, x')$ не удовлетворяет полевым уравнениям по переменной x' , хотя она удовлетворяет им по переменной x .

Мы хотим найти способ устранения полюсных вкладов из $G^{(1)}(x, x')$ при соблюдении аксиом Уолда, гарантирующих получение (почти) однозначного результата для $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$ в результате дифференцирования. Один из таких способов состоит в вычитании из $G^{(1)}(x, x')$ решения Адамара $S(x, x')$ [5, 482, 483]. Для доопределения этой процедуры следует выбрать граничные условия для S , т. е. задать $\omega_0(x, x')$. Поскольку в случае безмассовых полей в пространстве Минковского $D^{(1)}$ имеет форму (2.79), т. е. $\omega = 0$ (в массивном случае $\omega = \text{const}$), в соответствии с четвертым условием предположим, что $\omega_0(x, x') = 0$ для S . Из проведенных выше рассуждений ясно, что для любого другого выбора ω_0 , совместного со всеми четырьмя условиями, результат будет отличаться от результата, получаемого при $\omega_0 = 0$, не более чем на локальный сохраняющийся тензор.

Выбирая $\omega_0 = 0$, будем иметь

$$G^B = G^{(1)} - S, \quad (6.268)$$

где G^B (индекс B обозначает часть, зависящую от выбора граничных условий) — гладкая однозначно определенная функция x и x' . С помощью этой функции можно построить $\langle T_{\mu\nu}^B \rangle$ путем дифференцирования (детали построения см. в разд. 6.4).

Результат, очевидно, удовлетворяет второму условию Уолда, так как обе части $G^{(1)}$ и S , из которых он строится, удовлетворяют условию причинности: $G^{(1)}$ — потому, что условие причинности выполняется для поля ϕ , а S — потому, что является чисто локальной величиной, не зависящей от геометрии вне светового конуса. При $x' \rightarrow x$ G^B зависит только от геометрии на световом конусе вокруг точки x и внутри него.

Легко показать, что третье условие также выполняется. С помощью соотношения (6.260) матричные элементы $T_{\mu\nu}^B$ между ортогональными состояниями можно представить в виде

$$\begin{aligned} \langle \Pi_+ | T_{\mu\nu}^B | \Pi_- \rangle &= \frac{1}{2} \langle \Psi | T_{\mu\nu}^B | \Psi \rangle - \frac{1}{2} \langle \Phi | T_{\mu\nu}^B | \Phi \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x' \rightarrow x} \mathcal{D}_{\mu\nu} (G_{\Psi}^B - G_{\Phi}^B) = \frac{1}{2} \lim_{x' \rightarrow x} \mathcal{D}_{\mu\nu} (G_{\Psi} - G_{\Phi}), \end{aligned} \quad (6.269)$$

где $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ — оператор, введенный на с. 204, а через G_Ψ и т. д. обозначены величины вида $\langle \Psi | \{ \Phi(x), \Phi(x') \} | \Psi \rangle$. Последнее равенство в (2.269) следует из того, что из G_Ψ и G_Φ вычитается одна и та же функция $S(x, x')$ в соответствии с предположением о перенормировке (6.268). Согласно третьему условию, выражение (6.269) должно быть «обычным» (формальным, «неперенормированным») выражением, каковым оно и является в действительности, поскольку не зависит от S .

К сожалению, предположение (6.268) не удовлетворяет первому условию Уолда. Как отмечалось выше, функция $S(x, x')$, вообще говоря, не удовлетворяет уравнению поля по обоим переменным x и x' . При выборе граничного условия $\omega_0 = 0$ она действительно не удовлетворяет этому уравнению по x' . Расчет для безмассового случая приводит к следующему выражению для дивергенции тензора энергии-импульса:

$$\nabla^\nu \langle T_{\mu\nu}^B \rangle = \frac{1}{4} \lim_{x' \rightarrow x} \nabla_\mu \left[\square_{x'} + \frac{1}{6} R(x') \right] G^B(x, x'), \quad (6.270)$$

откуда видно, что тензор $\langle T_{\mu\nu}^B \rangle$ не сохраняется, если не удовлетворяется полевое уравнение по x' . Правая часть (6.270) явно вычислена Уолдом [482] и равна

$$\nabla_\mu a_2(x)/64\pi^2, \quad (6.271)$$

где $a_2(x)$ — обычный коэффициент разложения де Витта — Швингера. Таким образом, чтобы построить сохраняющийся тензор $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, который удовлетворял бы второму, третьему и четвертому условиям Уолда, нужно взять

$$\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle = \langle T_{\mu\nu}^B(x) \rangle - a_2(x) g_{\mu\nu}(x)/64\pi^2. \quad (6.272)$$

Поскольку $g^{\mu\nu} \langle T_{\mu\nu}^B \rangle = 0$ по построению, находим

$$g^{\mu\nu} \langle T_{\mu\nu} \rangle = -a_2(x)/16\pi^2 \quad (6.273)$$

в согласии с конформной аномалией (6.119). Так как наш результат является единственным с точностью до локального сохраняющегося тензора, а тензора со следом, равным (6.273), не существует, можно прийти к заключению, что конформная аномалия является неизбежным следствием локальной полуклассической теории. Конечно, при этом остается свобода в выборе коэффициента при $\square R$ путем добавления некоторой линейной комбинации локальных сохраняющихся тензоров $^{(1)}H_{\mu\nu}$ и $^{(2)}H_{\mu\nu}$.

Первоначально Уолд предложил еще основанное на соображениях об устойчивости пятое условие, состоящее в требовании отсутствия в $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ слагаемых выше третьего адиабатического порядка (которые дают величину $\square R$ в выражении для

следа). Однако можно показать, что в общем случае тензор энергии-импульса будет содержать нелокальные члены, включающие вклады высших адиабатических порядков, которые не могут быть устранены введением (локальных) контрчленов, пропорциональных $^{(1)}H_{\mu\nu}$ и $^{(2)}H_{\mu\nu}$. Горовиц [294] предположил, что для безмассовых полей наличие нелокальных членов с высшими производными приведет к неустойчивости относительно плоского пространства-времени. Следствия таких результатов для полуклассической теории полностью еще не выяснены.

Какова связь между функцией $S(x, x')$, использованной здесь для обеспечения конечности $G^{(1)}$, и функцией де Витта — Швингера $G_{DS}^{(1)}(x, x')$, применявшейся выше для перенормировки $G^{(1)}$? Предварительно заметим, что (в четырехмерном случае) нас интересуют только члены разложения $G_{DS}^{(1)}$ не выше четвертого адиабатического порядка и порядка не выше σ . Слагаемые высших порядков по σ не дают вклада в $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ при $\sigma \rightarrow 0$. Из формулы (3.141) в явном виде находим

$$G^{(1)}(x, x') = (\Delta^{1/2}/4\pi^2) \left\{ a_0 \left[-(1/\sigma) + m^2 L (1 - 1/4 m^2 \sigma) - 1/2 m^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{5}{16} m^2 \sigma \right] - a_1 [L (1 - 1/2 m^2 \sigma) + 1/2 m^2 \sigma] - a_2 \sigma [1/2 L - 1/4] + \right. \\ \left. + (1/2 m^2) a_2 + O(T^{-6}) + O(\sigma^2) \right\}, \quad (6.274)$$

где $L \equiv \gamma + 1/2 \ln |1/2 m^2 \sigma|$, γ — постоянная Эйлера.

Ясно, что расходящиеся и логарифмические члены в (6.274) имеют форму решения Адамара (6.267)¹⁾ и ввиду их однозначности должны согласовываться с соответствующими членами в разложении $S(x, x')$. Более того, поскольку $G_{DS}^{(1)}$ удовлетворяет уравнениям поля в любом адиабатическом порядке и для каждой степени σ , определение коэффициентов при членах $a_0 m^2$, $a_0 m^4 \sigma$, $a_1 m^2 \sigma$ и $a_2 \sigma$ не зависит от членов, пропорциональных m^{-2} и более высоким степеням m^{-1} . Следовательно, эти коэффициенты должны совпадать с соответствующими величинами для решения Адамара $S(x, x')$. Это подтверждается и прямым вычислением [5]. Таким образом, разность между $G_{DS}^{(1)}$ и S есть «аномальный член», т. е. последний член в (6.274), стремящийся к $a_2/(8\pi^2 m^2)$ при $x' \rightarrow x$. В практических расчетах перенормировка $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ осуществляется путем вычитания выражения (6.274) из $G^{(1)}$ и опускания после дифференцирования всех членов адиабатического порядка выше четвертого, которые происходят от (6.274). Как отмечалось на с. 215, эта процедура эквивалентна

¹⁾ Более детальное обсуждение характера сингулярности двухточечной функции Грина массивного скалярного поля содержится в работе [595*]. — Прим. перев.

вычитанию последнего члена в (6.274) только через его вклад вида $2\{^{1/4} - [-(1/n)]\xi\}m^2g_{\mu\nu}\phi^2$ в (3.190). Таким образом, в четырехмерном безмассовом случае с конформной связью последний член в (6.274) дает в $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ лишь вклад $-a_2g_{\mu\nu}/(64\pi^2)$ и в этом состоит единственное различие в выражении для $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, которое получается при вычитании величины $G_{DS}^{(1)}$ вместо S . Но в методе, в котором вычитается S , в точности такой член добавляется в (6.272) для обеспечения ковариантного сохранения. (Необходимость добавления такого члена можно видеть из того факта, что $G^{(1)}$ удовлетворяет уравнению поля по переменной x шаг за шагом по параметру адиабатичности. Аналогичный характер имеет и закон сохранения для $\langle T_{\mu\nu} \rangle$. Следовательно, для получения сохраняющегося $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ нужно учитывать все члены соответствующего адиабатического порядка. Член $m^2\phi^2$, не содержащий производных, должен учитываться с точностью до двух более высоких порядков по параметру адиабатичности, чем остальные члены, содержащие две производных.) Поэтому можно прийти к заключению, что способ перенормировок методом расщепления точек, сформулированный в разд. 6.2 и 6.4, эквивалентен методу вычитаний Уолда с использованием функции Адамара, который, как было показано выше, приводит к (почти) однозначному результату (обсуждение двумерного случая см. в работе [76]). Таким образом, метод расщепления точек так же, как и другие способы перенормировки, которые, как мы показали, тесно связаны с ним, могут применяться с уверенностью, что даваемые ими результаты согласуются с физически весьма правдоподобными и однозначными (с точностью до локальных сохраняющихся тензоров) четырьмя условиями Уолда. Это означает, что получаемое перенормированное среднее значение тензора энергии-импульса $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}}$ представляет собой физически правильное решение, если полуклассическая теория вообще имеет какой-то смысл.

В заключение коснемся еще одного аспекта физической интерпретации среднего значения $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, связанного с граничными условиями. Обычно предполагается, что пространство-время не имеет границ. Но материальные поверхности могут действовать как эффективные границы, например на поверхности проводников электромагнитное поле должно исчезать (если пренебречь глубиной проникновения). Общая математическая теория эллиптических операторов в римановом пространстве [241, 242, 322, 355, 360, 444] и соответствующих волновых операторов в псевдоримановом пространстве-времени учитывает влияние границы ∂M многообразия M на разложение де Витта — Швингера и его эквивалент в эллиптическом случае. Оказывается, что при наличии границы к эффективному действию, даваемому формулами (6.36) и (6.40), следует добавить

поверхностное эффективное действие (см., например, [323])

$$W_S = \int_{\partial M} d^{n-1}x (\pm h)^{1/2} L_S(x), \quad (6.275)$$

где h — определитель метрики h_{ij} , индуцируемой на границе метрикой пространства-времени $g_{\mu\nu}$ (знаки \pm в зависимости от того, является ли граница ∂M времениподобной или пространственноподобной соответственно), а асимптотическое разложение (ср. с (6.40)) имеет вид

$$L_S \approx \frac{1}{2} (4\pi)^{-n/2} \sum_{j=0}^{\infty} b_{(j+1)/2}(x) \int_0^{\infty} (is)^{(2j-1-n)/2} e^{-im^2s} i ds. \quad (6.276)$$

Явный вид коэффициентов b зависит от характера граничных условий, налагаемых на поле на границе ∂M . В случае скалярного поля с граничными условиями Дирихле

$$\phi(x) = 0, \quad x \in \partial M, \quad (6.277)$$

первые несколько коэффициентов записываются в виде

$$\begin{aligned} b_{1/2} &= -1/2 \pi^{1/2}, \quad b_1 = 1/3 \chi, \\ b_{3/2} &= \frac{1}{192} \pi^{1/2} [3(3 - 32\xi) \chi^2 + 6(16\xi - 1) \chi_{\mu\nu} \chi^{\mu\nu} - \\ &\quad - 16(1 - 6\xi) \hat{R} - 24(8\xi - 1) R_{\mu\nu} n^\mu n^\nu], \end{aligned} \quad (6.278)$$

где n_μ — единичный вектор на ∂M , направленный внутрь, $\chi_{\mu\nu}$ и $\chi = \chi_\mu{}^\mu$ — вторая фундаментальная форма ∂M и ее след, \hat{R} — скаляр Риччи индуцируемой метрики $h_{\mu\nu}$ (см., например, [287], § 2.7). Для граничных условий Робина

$$[\psi(x) + n^\mu \nabla_\mu] \phi(x) = 0 \quad (6.279)$$

получаем

$$\begin{aligned} b_{1/2} &= 1/2 \pi^{1/2}, \quad b_1 = 1/3 (\chi - 6\psi), \\ b_{3/2} &= \frac{1}{192} \pi^{1/2} [192\psi^2 + 96\psi\chi + 3(32\xi - 1) \chi^2 + \\ &\quad + 6(3 - 16\xi) \chi_{\mu\nu} \chi^{\mu\nu} + 16(1 - 6\xi) \hat{R} - 24(1 - 8\xi) R_{\mu\nu} n^\mu n^\nu]. \end{aligned} \quad (6.280)$$

Ясно, что слагаемые с $j \leq (n-1)/2$ в (6.276) являются расходящимися. В предыдущих разделах расходящиеся величины сначала подвергались некоторой регуляризации, а затем бесконечности устранялись путем перенормировки. Поверхностное эффективное действие (6.275) также можно регуляризовать с помощью сформулированных выше методов и далее исследовать возможность устранения расходимостей посредством перенормировки констант в действии для гравитационного поля.

Обобщенное гравитационное действие, которое было перенормировано в разд. 6.2, не предусматривает поверхностных расходимостей, поэтому на первый взгляд кажется, что наличие границы ∂M , на которой накладываются граничные условия на поле, приводит к истинной бесконечности для натяжений вакуума на границе. В работе [151] приведены аргументы, говорящие о том, что такие поверхностные расходимости представляют собой реальный эффект в теории квантованных полей. Во всяком случае, существование границ пространства-времени представляет собой настолько патологическое явление, что возникновение расходимостей в $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ не вызывает особого удивления. В случае материальных поверхностей следует учитывать, что замена их границами многообразия представляет собой некоторую идеализацию. Например, в электромагнитном случае конечная проводимость реальных проводников приводит к тому, что вещество становится прозрачным при очень высоких частотах, что обеспечивает ультрафиолетовое обрезание при интегрировании по модам. (Параметр обрезания, применявшийся в разд. 4.1 как чисто математическое средство, в этом случае имеет физическое истолкование.) Следовательно, кажущиеся расходимости на материальных поверхностях на самом деле представляют собой очень большие, но конечные вклады в $\langle T_{\mu\nu} \rangle$. Дойч и Канделас [151] отметили, что любое изменение проводимости вещества приведет к большому и, возможно, измеримому изменению $\langle T_{\mu\nu} \rangle$.

С другой стороны, если допустить, что обобщенное эйнштейновское действие может содержать поверхностные члены, такие, как в (6.278) и (6.280), то расходимости, возникающие в (поверхностном) действии для материальных полей, можно устранить путем перенормировки. Такой подход развит в работе [323].

Необходимость добавления к обычному эйнштейновскому действию S_g (6.11) поверхностного члена отмечена в другом контексте Гиббонсом и Хокингом [237]. Они указали, что действие (6.11) недостаточно для того, чтобы для всех вариаций метрики, исчезающих на ∂M , стационарность S_g приводила к уравнениям Эйнштейна. Причина состоит в том, что вариации членов в S_g , которые происходят от тех членов в R , которые линейны по вторым производным метрики, можно преобразовать с помощью интегрирования по частям в интеграл по ∂M , зависящий от нормальных производных метрики на поверхности. Если не требовать исчезновения нормальных производных на ∂M , то необходимо добавить в (6.11) член, сокращающий этот поверхностный интеграл. Гиббонс и Хокинг получили для него выражение

$$\left(-\frac{1}{8\pi G}\right) \int_{\partial M} \chi(\pm h)^{1/2} d^{n-1}x + C, \quad (6.281)$$

где C зависит только от h , но не от g . Если граница может быть погружена в плоское пространство и имеет вторую фундаментальную форму $\chi_{\mu\nu}^0$, естественный выбор значения C таков

$$\frac{1}{8\pi G} \int_{\partial M} \chi^0 (\pm h)^{1/2} d^{n-1}x, \quad (6.282)$$

так что поверхностное действие обращается в нуль в плоском пространстве-времени. Важность учета члена (6.281) в квантовой гравитации подчеркнул Хокинг [285] (см. также разд. 8.5),

ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ ПЕРЕНОРМИРОВОК

Эта короткая глава посвящена примерам использования теории регуляризации и перенормировок, развитой в гл. 6. Число случаев, для которых $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ можно вычислить в простых функциях, весьма ограничено, и, вероятно, они все рассмотрены либо здесь, либо в работах, на которые мы даем ссылки.

Особое внимание уделяется моделям Робертсона — Уокера, как в связи с их важностью для космологии, так и потому, что, будучи конформно-плоскими, они могут служить хорошей иллюстрацией роли конформных аномалий. Но именно вследствие их простоты эти модели не отражают общей нелокальной структуры тензора энергии-импульса; поэтому в разд. 7.3 мы кратко обращаемся к менее изящному, но более реалистическому примеру анизотропной однородной космологической модели.

Хотя основная задача этой книги состоит в изложении теории квантованных полей в заданном фоновом пространстве-времени, мотивировка этого направления в значительной степени связана с возможными астрофизическими и космологическими приложениями, в которых должна учитываться динамика гравитационного поля. Например, многие специалисты в области космологии считают, что обратная реакция квантовых эффектов, порождаемых фоновым гравитационным полем, может оказывать глубокое воздействие на динамику ранней вселенной, приводя, в частности, к ее изотропизации. Мы не углубляемся в детали этой теории, имеющей важное самостоятельное значение, но отметим, что представленные здесь результаты являются отправной точкой для таких исследований. Краткое обсуждение широкого круга космологических приложений дано в разд. 7.4.

7.1. Двумерные модели

Перенормированный тензор энергии-импульса для конформно-тривиального случая безмассового скалярного поля с $\xi = 0$ в двумерном пространстве-времени получен в разд. 6.3 и 6.4. Мы используем элемент длины

$$ds^2 = C(u, v) du dv, \quad (7.1)$$

для которого скалярная кривизна равна

$$R = \square \ln C. \quad (7.2)$$

В плоском пространстве-времени $R = 0$, поэтому

$$\square \ln C = 4C^{-1} \eta^{uv} \partial_u \partial_v \ln C = 0. \quad (7.3)$$

Следовательно,

$$C = F(u) G(v), \quad (7.4)$$

где F и G — произвольные дифференцируемые функции.

Одно из решений уравнения (7.4) имеет вид $F = G = 1$, что возвращает нас к метрике пространства Минковского

$$ds^2 = du dv. \quad (7.5)$$

Другое решение можно получить из (7.5) преобразованием координат $u \rightarrow \bar{u}$, $v \rightarrow \bar{v}$, таким, что

$$u = f(\bar{u}), \quad v = \bar{v}, \quad (7.6)$$

которое превращает (7.5) в

$$ds^2 = f'(\bar{u}) d\bar{u} d\bar{v}. \quad (7.7)$$

Здесь штрихом обозначена производная функции по ее аргументу.

Если выбрать функцию f так, чтобы

$$\frac{1}{2} [\bar{t} - f(\bar{t})] = z \left\{ \frac{1}{2} [\bar{t} + f(\bar{t})] \right\}, \quad (7.8)$$

где

$$\bar{t} = \frac{1}{2} (\bar{u} + \bar{v}) \quad (7.9)$$

есть временная координата для переменных \bar{u} , \bar{v} , то соотношение (7.8) можно понимать как сужение к точке $\bar{x} = 0$ соотношения

$$\frac{1}{2} [\bar{v} - f(\bar{u})] = z \left\{ \frac{1}{2} [\bar{v} + f(\bar{u})] \right\}, \quad (7.10)$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{2} (\bar{v} - \bar{u}) \quad (7.11)$$

есть пространственная координата для системы \bar{u} , \bar{v} .

В системе координат (\bar{u}, \bar{v}) соотношение (7.10) принимает вид

$$x = z(t). \quad (7.12)$$

Его можно рассматривать как изображающее движение зеркала в задаче, исследованной в разд. 4.4. В системе координат (\bar{u}, \bar{v}) зеркало находится в точке $\bar{x} = 0$. В силу равенства (7.7) систе-

ма, в которой зеркало движется, конформно связана с системой покоя, поэтому можно воспользоваться общим соотношением (6.136), связывающим $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ для конформно-связанных вакуумных состояний. В разд. 4.3 показано, что для конформно-связанного безмассового поля в четырехмерном случае $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ в полупространстве, ограниченном статической плоской поверхностью, обращается в нуль. Тот же результат можно получить и для двумерного случая. Поэтому первое слагаемое в правой части выражения (6.136) можно опустить. Соответствующий конформный фактор C , как видно из формулы (7.7), равен $f'(\bar{u})$; поэтому, вспоминая, что $R = 0$, из выражения (6.137) для средних значений компонент тензора энергии-импульса в состоянии «конформного вакуума» получаем [137]

$$\langle T_{\bar{u}\bar{u}} \rangle_{\text{рен}} = - \left(\frac{1}{12\pi} \right) (f')^{1/2} \partial_{\bar{u}}^2 (f')^{-1/2},$$

$$\langle T_{\bar{u}\bar{v}} \rangle_{\text{рен}} = \langle T_{\bar{v}\bar{u}} \rangle_{\text{рен}} = \langle T_{\bar{v}\bar{v}} \rangle_{\text{рен}} = 0.$$

Переходя к системе координат (u, v) , будем иметь

$$\langle T_{uu} \rangle_{\text{рен}} = - \left(\frac{1}{12\pi} \right) (f')^{-3/2} \partial_u^2 (f')^{-1/2}, \quad (7.13)$$

$$\langle T_{uv} \rangle_{\text{рен}} = \langle T_{vu} \rangle_{\text{рен}} = \langle T_{vv} \rangle_{\text{рен}} = 0. \quad (7.14)$$

Аргумент функции f в (7.13) равен

$$\bar{u} = f^{-1}(u) = 2\tau_u - u \equiv p(u) \quad (7.15)$$

(см. (4.44) и (4.50)). Выражая (7.13) через $p(u)$, получаем

$$\langle T_{uu} \rangle_{\text{рен}} = (1/12\pi) (p')^{1/2} \partial_u^2 (p')^{-1/2}. \quad (7.16)$$

Поскольку $\langle T_{uu} \rangle_{\text{рен}}$ зависит только от u , эта величина постоянна вдоль запаздывающих изотропных лучей $u = \text{const}$ от \mathcal{I}^+ до поверхности зеркала. Это означает, что энергия создается самим зеркалом и затем распространяется вправо без затухания. Заметим, что хотя точно указать, в каких точках рождаются отдельные кванты, невозможно, источник энергии можно выявить однозначно. Действительно, потока энергии справа налево нет. Эта асимметрия возникла в силу выбора граничного условия запаздывания, подразумевавшегося при преобразовании координат (7.6). В случае когда существуют статические in- и out-области, это эквивалентно выбору в качестве квантового состояния $|0, \text{in}\rangle$, а не $|0, \text{out}\rangle$. Чтобы убедиться в этом, предположим, что $z(t) = \text{const}$ при $t < t_0$, что задает in-область ($t < t_0$). Тогда из (7.8) следует, что $f'(\bar{u}) = 1$ при $t < t_0$, и ясно, что «конформный вакуум», введенный в терминах координат (7.7), соответствует in-вакууму, совпадающему с обычным вакуумным состоянием для статической системы. Поменяв местами координаты u и v

в (7.6), можно получить аналогичное соотношение между опережающим граничным условием и out-вакуумом [224].

Преобразуя выражения (7.14) и (7.16) к координатам (t, x) и пользуясь соотношениями (4.44) и (7.15), чтобы выразить результат через траекторию зеркала $z(\tau_u)$, получаем

$$\begin{aligned} \langle T_{tt} \rangle_{\text{рен}} &= \langle T_{xx} \rangle_{\text{рен}} = -\langle T_{xt} \rangle_{\text{рен}} = -\langle T_{tx} \rangle_{\text{рен}} = \\ &= -\frac{1}{12\pi} \frac{(1 - \dot{z}^2)^{1/2}}{(1 - \dot{z})^2} \frac{d}{d\tau_u} \left[\frac{\ddot{z}}{(1 - \dot{z}^2)^{3/2}} \right]. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Здесь $z = z(\tau_u)$, а точка обозначает производную по τ_u . Параметр τ_u (введенный в (4.44)) фактически представляет собой временную координату зеркала в момент пересечения его траектории с запаздывающим изотропным лучом u . Заметим, что для нерелятивистского движения выражение (7.17) сводится к $-(12\pi)^{-1} \ddot{z}$. Правую часть (7.17) можно записать в виде

$$-\frac{1}{12\pi} \frac{(1 - v^2)^{1/2}}{(1 - v)^2} \frac{d\alpha}{d\tau_u}, \quad (7.18)$$

где v — скорость зеркала \dot{z} , а α — собственное ускорение в собственной системе отсчета. При $|v| < 1$ знак выражения (7.18) зависит от того, является ли α возрастающей или убывающей функцией времени. Таким образом, зеркало может излучать отрицательную энергию, если ускорение возрастает, будучи направленным вправо, или убывает, будучи направленным влево. Излучение отрицательной энергии — чисто квантовое явление. Оно делает возможными необычные физические эффекты, не встречающиеся в классической теории. В следующей главе мы увидим, что потоки отрицательной энергии играют важную роль при квантовом испарении черной дыры. Можно предположить, что движущееся зеркало можно использовать для охлаждения нагретого тела потоком отрицательной энергии в нарушение второго закона термодинамики. Но если выражение (7.17) проинтегрировать по времени между двумя стационарными положениями зеркала, то результат будет положительно определенным, т. е. поток отрицательной энергии ограничен конечными интервалами времени [224]. Форд [203] показал, что потоки отрицательной энергии невозможно поддерживать достаточно долго, чтобы уменьшение энтропии нагретого тела превысило уровень, соответствующий обычным тепловым флуктуациям.

Представляет интерес случай гиперболической траектории зеркала, когда $\alpha = \text{const}$, т. е. ускорение постоянно в собственной системе отсчета. Из выражения (7.18) тогда следует, что $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}} = 0$, т. е. энергия не излучается в течение промежутков времени, когда ускорение постоянно. Но, как было показано в разд. 4.4, в этом случае преобразование Боголюбова (4.64) и

(4.65) недиагонально. Отсюда следует, что зеркало испускает *частицы*, ибо, как видно из обсуждения формулы (3.80), детектор частиц реагирует на них. Тем не менее *энергия* не излучается. Этот пример особенно отчетливо иллюстрирует нетривиальность соотношения между энергией-импульсом поля и частицами. Наличие частиц еще не означает наличия энергии.

Может показаться парадоксальным, что детектор частиц, несмотря на отсутствие энергии поля, поглощает кванты и переходит в возбужденное состояние. Разгадка состоит в том, что при этом сам детектор испускает отрицательную энергию, компенсирующую изменение энергии поля. Испускание отрицательной энергии зеркалами и детекторами имеет прецеденты в квантовой теории поля. И в отсутствие зеркал или детекторов частиц можно построить многочастичные состояния с нулевым или отрицательным потоком энергии [189] (см. также [135]).

Еще одна траектория зеркала (4.51) интересна тем, что приводит к тепловому потоку излучения в более поздние моменты времени. Применяя формулу (7.16) к (4.52), находим

$$\langle T_{tt} \rangle_{\text{рен}} = \frac{\kappa^2}{48\pi}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (7.19)$$

что представляет собой выражение для потока теплового излучения с температурой $\kappa/2\pi$. Этот результат находится в полном согласии с расчетом теплового спектра частиц, выполненным в разд. 4.4. Действительно, для теплового спектра (4.61)

$$\langle T_{tt} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\omega}{e^{2\pi\omega/\kappa} - 1} d\omega = \frac{\kappa^2}{48\pi}, \quad (7.20)$$

откуда видно, что вероятность рождения частицы с частотой ω равна $(1/2\pi)(e^{2\pi\omega/\kappa} - 1)^{-1}$. (Для получения этого результата из (4.61) нужно использовать волновые пакеты, чтобы перейти от числа *частиц* в данной моде $|\beta_{\omega\omega'}|^2$ к соответствующей скорости рождения, см. разд. 8.1.)

Полезно отметить, что в соответствии с формулой (7.20) в случае теплового спектра излучения энергия излучения представляет собой произведение числа частиц на энергию квантов ω , просуммированное по всем модам. В общем случае, как мы убедились, простого соотношения между числом частиц и энергией не существует. Но для теплового излучения наивное представление об энергии « $\hbar\omega$ на один квант» остается справедливым. Это можно интерпретировать как результат отсутствия корреляций между модами в тепловом спектре (см. также гл. 8). Для произвольных траекторий зеркал такое заключение неверно.

Можно также рассмотреть задачу о двух зеркалах, одно из которых неподвижно, а другое движется; при этом возникает «возмущенный казимировский» вклад от первого члена в правой части формулы (6.136). В результате находим [224]

$$\langle T_{tt} \rangle_{\text{рен}} = \langle T_{xx} \rangle_{\text{рен}} = \Lambda(u) + \Lambda(v),$$

$$\langle T_{tx} \rangle_{\text{рен}} = \langle T_{xt} \rangle_{\text{рен}} = \Lambda(v) - \Lambda(u), \quad (7.21)$$

$$\Lambda = -(1/24\pi) [(R'''/R) - \frac{3}{2}(R''/R') + \pi^2 (R')^2/2L^2]. \quad (7.22)$$

Здесь штрихи обозначают производные по аргументу, а функция R определена уравнением

$$R[t + z(t)] = R(t - z(t)) + 2L \quad (7.23)$$

через траекторию зеркала $z(t)$. Покоящееся зеркало находится в точке $x = 0$, а второе зеркало находится в точке $x = L$ до момента времени $t = 0$. Вакуум определен в in -области ($t < 0$). Заметим, что выражения (7.21) соответствуют суперпозиции потоков, движущихся вправо и влево. Так получается потому, что поток излучения от движущегося зеркала отражается неподвижным зеркалом. В частном случае $z(t) = L$ при всех значениях t из уравнения (7.23) находим $R(u) = u$ и выражение (7.21) дает $\langle T_{tt} \rangle = -\pi/(24L^2)$, т. е. казимировскую энергию для двух пластин, находящихся на расстоянии L . Этот результат равен одной четвертой от (4.8); различие связано с использованием граничных условий исчезновения поля вместо периодических граничных условий.

Еще один интересный случай соответствует $F(x) = G(x) = \exp(ax)$, $a = \text{const}$ в формуле (7.4). Это снова плоское пространство с метрикой $ds^2 = e^{2a\eta}(d\eta^2 - dx^2)$, т. е. вселенная Милна, рассмотренная в разд. 5.3. Подставляя $C = e^{2a\eta}$ в общую формулу (6.136) и полагая первый член в правой части равным нулю, поскольку двумерное пространство Милна конформно всему двумерному пространству Минковского, находим

$$\langle T_t^t \rangle_{\text{рен}} = -\langle T_x^x \rangle_{\text{рен}} = -1/24\pi t^2 \quad (7.24)$$

в согласии с (5.46).

Число конформно-нетривиальных двумерных точно решаемых примеров невелико. Один из таких примеров представляет собой пространство де Ситтера, которое можно рассматривать по аналогии с четырехмерным случаем, исследованным в разд. 6.4. Другой пример — пространство Робертсона — Уокера с конформным фактором

$$C(\eta) \sim e^{a\eta^2}, \quad a = \text{const}. \quad (7.25)$$

При таком выборе $RC = 2\alpha$ и нормированные решения безмассового уравнения (5.4) при $\xi(n) = \xi(2) = 0$ и произвольном ξ имеют вид

$$(4\pi\omega)^{-1/2} e^{i(kx - \omega\eta)}, \quad (7.26)$$

где

$$\omega^2 = k^2 + \beta^2, \quad \beta^2 \equiv 2\alpha_\xi^2. \quad (7.27)$$

Таким образом, для вакуумного состояния, связанного с положительно-частотными модами (7.26), получаем

$$G^{(1)}(x'', x') = (1/2\pi) \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{-1} e^{ik \Delta x - i\omega \Delta \eta} dk = \quad (7.28)$$

$$= (1/\pi) \operatorname{Re} K_0 [i\beta (\Delta u \Delta v)^{1/2}], \quad (7.29)$$

где $\Delta u = (\eta'' - \eta') - (x'' - x')$, $\Delta v = (\eta'' - \eta') + (x'' - x')$. Разложение (7.29) по степеням $\Delta u \Delta v$ дает

$$G^{(1)}(x'', x') = (1/\pi) \left\{ -\gamma - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{4} \beta^2 \Delta u \Delta v \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \beta^2 \Delta u \Delta v \left[\gamma + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{4} \beta^2 \Delta u \Delta v \right| + 1 \right] + \dots \right\}. \quad (7.30)$$

Теперь можно использовать разложение (6.200) и аналогичное разложение с заменой u на v для приведения (7.30) к явно геометрическому виду

$$G^{(1)}(x'', x') = - (1/\pi) \left\{ (1 - \varepsilon^2 \Sigma \xi R) \left[\gamma + \frac{1}{2} \ln |\varepsilon^2 \xi R| \right] + \right. \\ \left. + \varepsilon^2 \Sigma (A_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta \Sigma^{-1} - \xi R) \right\}, \quad (7.31)$$

где $A_{\alpha\beta}$ — тензор с компонентами

$$A_{uu} = A_{vv} = \frac{1}{48} (-\dot{D} + 2D^2), \quad A_{uv} = A_{vu} = -\frac{1}{24} \dot{D}. \quad (7.32)$$

В соответствии с установленной процедурой перенормировок из выражения (7.31) необходимо вычесть члены до второго адипатического порядка в разложении де Витта — Швингера, т. е. члены, приведенные в (6.203). Логарифмически расходящиеся члены взаимно уничтожаются, и остается выражение

$$- (1/\pi) \left\{ \frac{1}{2} (1 - \varepsilon^2 \Sigma \xi R) \ln |\xi R m^{-2}| + \varepsilon^2 \Sigma (A_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta \Sigma^{-1} - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \xi R + \frac{1}{12} R) - \frac{1}{2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) m^{-2} R + O(m^2) \right\}. \quad (7.33)$$

Сравнивая (7.33) с формулой (6.205) и опуская члены $O(m^2)$, находим

$$c = -(1/2\pi) \left[\ln |\xi R m^{-2}| - \left(\xi - \frac{1}{6} \right) m^{-2} R \right],$$

$$e_{\alpha\beta} = -(1/\pi) A_{\alpha\beta}, \quad f = (1/2\pi) \left(3\xi - \frac{1}{6} \right) R, \quad q = \gamma = r = 0;$$

далее с помощью (6.206) получаем следующее выражение для перенормированного тензора энергии-импульса в безмассовом пределе:

$$\langle 0 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle_{\text{рен}} = -(1/48\pi) R g_{\mu\nu} + \theta_{\mu\nu} + (\xi/4\pi) \left[(R;_{\mu\nu}/R) - \right. \\ \left. - (R;_{\mu} R;_{\nu}/R^2) + \frac{3}{2} R g_{\mu\nu} \right], \quad (7.34)$$

где $\theta_{\mu\nu}$ — тензор, имеющий нулевой след,

$$\theta_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left\{ A_{\mu\nu} - \frac{1}{2} A_{\alpha}{}^{\alpha} g_{\mu\nu} - \frac{1}{4} [(R;_{\mu\nu}/R) - (R;_{\mu} R;_{\nu}/R^2)] - \right. \\ \left. - \frac{1}{8} R g_{\mu\nu} \right\}. \quad (7.35)$$

а члены выше второго адиабатического порядка, возникающие при дифференцировании слагаемых в разложении де Витта — Швингера, как объяснено в гл. 6, опущены. (При этом исключается член, пропорциональный m^{-2} .) При получении выражения (7.34) мы также воспользовались тем, что в двумерном пространстве-времени $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0$ и в рассматриваемом конкретном примере $\square \ln R = -\ln C = -R$. Заметим, что при $\xi = 0$ след выражения (7.34), как и следовало ожидать, равен $-R/24\pi$, причем тензор $\theta_{\mu\nu}$ в (7.35) совпадает с тензором $\theta_{\mu\nu}$, определяемым формулой (6.137). Таким образом, слагаемое, пропорциональное ξ , в (7.34) можно рассматривать как поправку к формуле (6.136), возникающую в случае неконформной связи.

7.2. Модели Робертсона — Уокера

Большое внимание уделялось расчету тензора энергии-импульса для квантованных полей в фоновых пространствах Робертсона — Уокера. Интерес к ним связан как с высокой степенью симметрии этих моделей, так и с их значением для космологии.

В качестве первого примера рассмотрим четырехмерное статическое гиперболическое ($K = -1$) пространство-время Робертсона — Уокера, которое обсуждалось в разд. 5.2. Будем исследовать случай безмассового скалярного поля с конформной

связью [70]. Функция Грина $D^{(1)}$ определяется из формулы (5.33), в которой следует опустить $i\epsilon$ и ввести множитель 2. Разлагая $\text{sh}\Delta\chi$ до величин порядка $(\Delta\chi)^6$ и используя разложение (6.201), получаем

$$D^{(1)}(x'', x') = -\frac{1}{(8\pi^2\epsilon^2\Sigma)} + \frac{1}{(12\pi^2\Sigma)}(t^1)^2 - \frac{7}{180\pi^2\Sigma^2}\epsilon^2(t^1)^4 + O(\epsilon^4). \quad (7.36)$$

С помощью (5.13) находим $R_{\eta\eta} = 0$, $R_{xx} = 2$; поэтому выражение (7.36) можно переписать в явно геометрической форме

$$D^{(1)}(x'', x') = -\frac{1}{8\pi^2\epsilon^2\Sigma} + \frac{1}{24\pi^2}R_{\alpha\beta}\frac{t^\alpha t^\beta}{\Sigma} - \frac{7\epsilon^2}{720\pi^2}R_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta}\frac{t^\alpha t^\beta t^\gamma t^\delta}{\Sigma^2} + O(\epsilon^4). \quad (7.37)$$

Сравнивая (7.37) с выражением (6.204) для статической гиперболической модели, можно убедиться в том, что безмассовые вклады совпадают. Более того, коэффициент при (последнем) слагаемом в (6.204), пропорциональном m^{-2} , в рассматриваемом случае обращается в нуль; поэтому конформная аномалия отсутствует. Следовательно, если вычесть $G^{(1)}$ из $D^{(1)}$ для получения перенормированного выражения, то мы получим точно нуль.

Таким образом, мы приходим к следующему результату:

$$\langle 0 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle_{\text{рен}} = 0 \quad (7.38)$$

для состояния конформного вакуума, определенного с помощью положительно-частотных мод (5.28) и ассоциируемого с конформным вектором Киллинга, связанным с вектором Киллинга ∂_η в пространстве Риндлера (разд. 5.5). К этому результату мы уже пришли обходным путем, используя риндлеровский тензор энергии-импульса, в разд. 6.3 (6.158). С другой стороны, теперь можно воспользоваться проведенным расчетом и формулой (6.158), чтобы получить тензор энергии-импульса Риндлера (6.157).

В качестве второго примера рассмотрим модели с $K=0$ и $K=+1$, но с C , зависящим от времени. Функцию $D^{(1)}$ в состоянии конформного вакуума можно получить с помощью конформного масштабного преобразования (2.79) и (5.32) соответственно (полагая $\epsilon=0$ и удваивая последнее выражение). Результат в обоих случаях имеет вид

$$D^{(1)}(x'', x') = \frac{KC^{-1/2}(\eta'')C^{-1/2}(\eta')}{4\pi^2[\cos(K^{1/2}\Delta\eta) - \cos(K^{1/2}\Delta\chi)]}, \quad (7.39)$$

где, не теряя общности, мы выбрали раздвижку точек x'' и x' в плоскости (η, χ) .

Воспользовавшись разложениями (6.201) и соотношением

$$C^{-1/2}(\eta'')C^{-1/2}(\eta') = C^{-1} \left\{ 1 + \varepsilon^2 \left[\left(-\frac{1}{2} \dot{D} + \frac{1}{4} D^2 \right) (t_1^0)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4} D^2 \Upsilon (t_1^1)^2 \right] + \varepsilon^4 \left[\left(-\frac{1}{24} \ddot{D} + \frac{7}{48} \ddot{D} D + \frac{5}{24} \dot{D}^2 - \frac{5}{16} \dot{D} D^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{16} D^4 \right) (t_1^0)^4 + \left(\frac{7}{48} \ddot{D} D + \frac{1}{12} \dot{D}^2 - \frac{31}{48} \dot{D} D^2 + \frac{1}{4} D^4 \right) \Upsilon \times \right. \\ \left. \left. \times (t_1^0 t_1^1)^2 + \left(-\frac{1}{24} \dot{D} D^2 + \frac{1}{16} D^4 \right) \Upsilon^2 (t_1^1)^4 \right] \right\} + O(\varepsilon^6), \quad (7.40)$$

которое выполняется в любом пространстве Робертсона — Уокера, находим

$$D^{(1)}(x'', x') = - (1/8\pi^2 \varepsilon^2 \Sigma) \left\{ 1 + \varepsilon^2 \left[\left(-\frac{1}{3} \dot{D} + \frac{1}{12} D^2 + \frac{1}{3} K \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (t_1^0)^2 + \left(\frac{1}{12} D^2 + \frac{1}{3} K \right) \Upsilon (t_1^1)^2 \right] + \varepsilon^4 \left[\left(-\frac{1}{30} \ddot{D} + \frac{1}{10} \ddot{D} D + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{7}{60} \dot{D}^2 - \frac{2}{15} \dot{D} D^2 + \frac{1}{60} D^4 - \frac{1}{6} \dot{D} K + \frac{1}{12} D^2 K + \frac{3}{45} K^2 \right) (t_1^0)^4 + \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{1}{10} \ddot{D} D + \frac{11}{180} \dot{D}^2 - \frac{23}{72} \dot{D} D^2 + \frac{31}{360} D^4 - \frac{5}{18} \dot{D} K + \frac{7}{18} D^2 K + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{8}{45} K^2 \right) \Upsilon (t_1^0 t_1^1)^2 + \left(-\frac{1}{40} \dot{D} D^2 + \frac{1}{60} D^4 + \frac{1}{12} D^2 K + \frac{3}{45} K^2 \right) \times \right. \\ \left. \left. \times (t_1^1)^4 \Upsilon^2 \right] \right\}. \quad (7.41)$$

Если теперь использовать линейные комбинации геометрических тензорных величин с точностью до соответствующего адиабатического порядка, можно представить (7.41) в чисто геометрической форме:

$$D^{(1)}(x'', x') = - \frac{1}{8\pi^2 \varepsilon^2 \Sigma} + \frac{1}{24\pi^2} \left[R_{\alpha\beta} \frac{t^{\alpha} t^{\beta}}{\Sigma} - \frac{1}{6} R \right] + \\ + \frac{\varepsilon^2 \Sigma}{1440\pi^2} \left[2R_{\alpha}{}^{\lambda} R_{\lambda\beta} \frac{t^{\alpha} t^{\beta}}{\Sigma} + 4R R_{\alpha\beta} \frac{t^{\alpha} t^{\beta}}{\Sigma} - \frac{1}{3} R^2 - \right. \\ \left. - R_{;\alpha\beta} \frac{t^{\alpha} t^{\beta}}{\Sigma} - 14R_{\alpha\beta} R_{\gamma\delta} \frac{t^{\alpha} t^{\beta} t^{\gamma} t^{\delta}}{\Sigma^2} + 6R_{\alpha\beta;\gamma\delta} \frac{t^{\alpha} t^{\beta} t^{\gamma} t^{\delta}}{\Sigma^2} \right]. \quad (7.42)$$

Заметим, что два других возможных члена типа $R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$ и $\square R$ здесь не появляются. Тот факт, что выражение (7.42) имеет чисто геометрический характер, объясняется конформной тривиальностью рассматриваемого примера.

Для получения перенормированного выражения необходимо вычесть члены вплоть до четвертого адиабатического порядка в разложении де Витта — Швингера (6.204). Расходящиеся чле-

ны и слагаемые, содержащие произведения четырех векторов t^α , взаимно уничтожаются, и остается выражение

$$-\frac{R}{144\pi^2} + \frac{\varepsilon^2 \Sigma}{1440\pi^2} \left[\left(-2R_\alpha{}^\lambda R_{\lambda\beta} + \frac{16}{3} R R_{\alpha\beta} - R_{;\alpha\beta} \right) \frac{t^\alpha t^\beta}{\Sigma} - \right. \\ \left. - \frac{2}{3} R^2 + \square R + R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \right] - \frac{m^{-2}}{1440\pi^2} \left(R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} R^2 - \square R \right). \quad (7.43)$$

Сопоставляя с формулой (6.205), находим, что здесь присутствуют члены вида c , $e_{\alpha\beta}$ и f , поэтому с помощью (6.206) (опуская члены выше четвертого адиабатического порядка, возникающие при дифференцировании $G_{DS}^{(1)}$), получаем для перенормированного тензора энергии-импульса следующее выражение:

$$\langle 0 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle_{\text{рен}} = (1/2880\pi^2) \left[\left(-\frac{1}{3} R_{;\mu\nu} + R_{\mu}{}^\rho R_{\rho\nu} - R R_{\mu\nu} \right) + \right. \\ \left. + g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{3} \square R - \frac{1}{2} R^{\rho\tau} R_{\rho\tau} + \frac{1}{3} R^2 \right) \right] = \\ = - \left(\frac{1}{2880\pi^2} \right) \left[\frac{1}{6} {}^{(1)}H_{\mu\nu} - {}^{(3)}H_{\mu\nu} \right], \quad (7.44)$$

которое находится в согласии с (6.141), если учесть, что первый член в правой части обращается в нуль, поскольку конформный вакуум для пространств с $K=0$ и $K=+1$ связан с вакуумом Минковского (см. разд. 5.5 и рис. 20). Результат (7.44) для $K=0$ был получен данным методом в работе [137], а для $K=0$ и $K=+1$ — в работе [77].

Подобный расчет можно проделать и для случая $K=-1$ при том же выборе конформного вакуума, что и в (7.38). Оказывается, что к чисто геометрическому вкладу (7.42) в $D^{(1)}$ в этом случае добавляется локальный член, не имеющий геометрического характера, который после подстановки в (6.206) дает вклад $(\xi/a(\eta))^4 \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{Риндлер}}$, фигурирующий в (6.141) (см. (6.158) и соответствующее обсуждение).

Банч и Дэвис [78] выполнили расчет для безмассового скалярного поля с неконформной связью в пространстве Робертсона — Уокера для некоторых масштабных факторов специального вида, допускающего вычисление функции Грина $D^{(1)}$ в терминах известных функций. Например, при $K=0$ и

$$a(t) = at^c. \quad (7.45)$$

(α , c — постоянные) имеем

$$C(\eta) = \alpha^{2/(1-c)} (1-c)^{2c/(1-c)} \eta^{2c/(1-c)}, \quad (7.46)$$

и уравнение для поля с минимальной связью $\square \phi = 0$ имеет точные решения (5.3) с $n=4$ и [207]

$$\chi_k(\eta) = C^{1/2}(\eta) (|b| \eta / a_0^2)^{1/2b} [c_1 H_\nu^{(1)}(k\eta) + c_2 H_\nu^{(2)}(k\eta)], \quad (7.47)$$

где $H^{(1)}, H^{(2)}$ — функции Ханкеля, $k = |\mathbf{k}|$ и

$$b = (1 - c)/(1 - 3c), \quad v = 1/(2|b|), \quad a_0 = a[a^3(1 - 3c)]^{c/(1-3c)}. \quad (7.48)$$

Коэффициенты c_1 и c_2 — комплексные числа, связанные условием постоянства вронскиана (5.6), которое здесь сводится к условию

$$|c_2|^2 - |c_1|^2 = \pi/4b. \quad (7.49)$$

Скалярное поле с минимальной связью можно использовать для описания линеаризованных гравитонов в модели вселенной Робертсона — Уокера [255, 256].

Выберем вакуумное состояние заданием $c_1 = 0$; это состояние сводится к вакууму Минковского в пределе $c \rightarrow 0$. Функцию Грина $D^{(1)}(x'', x')$ нетрудно вычислить как интеграл по модам

$$\begin{aligned} D^{(1)}(x'', x') &= \int [u_k(x'') u_k^*(x') + u_k^*(x'') u_k(x')] d^3k = \\ &= (1/8\pi\eta''\eta') C^{-1/2}(\eta'') C^{-1/2}(\eta') (1/4 - v^2) \frac{1}{\cos \pi v} \times \\ &\quad \times F(3/2 + v, 3/2 - v; 2; 1 + (\Delta\eta^2 - \Delta z^2)/4\eta''\eta'), \end{aligned} \quad (7.50)$$

где F — гипергеометрическая функция, и раздвижка точек выбрана в плоскости (η, z) , причем $\Delta\eta = \eta'' - \eta'$, $\Delta z = z'' - z' = x^{3''} - x^{3'}$.

Теперь следует разложить выражение (7.50) по степеням ε до порядка ε^2 , используя (6.201) с заменой r на z и учитывая равенство (7.40). Выражая результат через линейные комбинации геометрических тензорных величин в соответствующем адиабатическом порядке, будем иметь

$$\begin{aligned} D^{(1)}(x'', x') &= -\frac{C^{-1/2}(\eta'') C^{-1/2}(\eta')}{2\pi^2(\Delta\eta^2 - \Delta z^2)} + \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\varepsilon^2}{C\eta^2} \right| + v + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \psi\left(\frac{3}{2} + v\right) + \frac{1}{2} \psi\left(\frac{3}{2} - v\right) \right] \left[-\frac{R}{2\pi^2} + \frac{\varepsilon^2 \Sigma}{288\pi^2} \left(4RR_{\alpha\beta} \frac{t^\alpha t^\beta}{\Sigma} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2R_{;\alpha\beta} \frac{t^\alpha t^\beta}{\Sigma} + 2 \square R - R^2 \right) \right] + \frac{R}{48\pi^2} - \frac{\varepsilon^2 \Sigma}{144\pi^2} \left[RR_{\alpha\beta} \frac{t^\alpha t^\beta}{\Sigma} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{19}{24} R^2 + \frac{3R}{C\eta^2} \right] + O(\varepsilon^4). \end{aligned} \quad (7.51)$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой выражение для функции $D^{(1)}(x'', x')$ в случае конформной связи $\xi = 1/6$, мы видим, что при $\xi = 0$ появляется дополнительный вклад. Хотя функция $D^{(1)}$ по-прежнему является локальным бискаляром, теперь она содержит *негеометрические* члены, не имеющие тензорного (геометрического) характера, например член, содержащий η^{-2} , который возникает вследствие отклонения от

конформной тривиальности. Заметим, что при $R = 0$ добавочные члены исчезают. В этом случае нет различия между конформной и минимальной связью.

Перенормировка осуществляется вычитанием из (7.51) членов разложения де Витта — Швингера (6.204) при $\xi = 0$. Так как результат вычитания выражения (6.204) при $\xi = 1/6$ из конформной функции $D^{(1)}(x'', x')$, т. е. первый член в (7.51), нам уже известен, то теперь мы получим выражение (7.44) плюс дополнительные слагаемые в (7.51), а также члены, возникающие из-за различий между конформной и минимальной $G_{DS}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle_{\text{рен}} = & - \left(\frac{1}{2880\pi^2} \right) \left[\frac{1}{6} {}^{(1)}H_{\mu\nu} - {}^{(3)}H_{\mu\nu} \right] - \\ & - \left(\frac{1}{1152\pi^2} \right) {}^{(1)}H_{\mu\nu} \left[\ln(R/m^2) + \psi\left(\frac{3}{2} + \nu\right) + \psi\left(\frac{3}{2} - \nu\right) + \frac{4}{3} \right] + \\ & + \left(\frac{1}{13\,824\pi^2} \right) [24 \square R g_{\mu\nu} + 24 R R_{\mu\nu} + 3 R^2 g_{\mu\nu}] - \\ & - R g_{\mu\nu} / 192 \pi^2 c \eta^2. \quad (7.52) \end{aligned}$$

Логарифмический член, который всегда появляется при нарушении конформной тривиальности, содержит произвольный масштаб массы m . Изменение этого масштаба приводит к добавке к (7.52), пропорциональной сохраняющемуся тензору ${}^{(1)}H_{\mu\nu}$. Однако, как отмечалось в разд. 6.2, при получении перенормированного тензора энергии-импульса всегда имеется произвол в добавлении членов, пропорциональных ${}^{(1)}H_{\mu\nu}$, поскольку такой член появляется в левой части уравнений гравитационного поля. Таким образом, можно устранить все члены вида ${}^{(1)}H_{\mu\nu}$ в (7.52), перенормируя величину α в (6.220). Поэтому при переходе к безмассовому пределу ($m \rightarrow 0$) не возникает трудностей; достаточно лишь выполнить дополнительную (на этот раз инфракрасную) перенормировку α . Заметим, что негеометрические члены, содержащие ψ -функции, и множитель $4/3$ можно включить в новое значение массы m .

Оставшиеся в выражении (7.52) члены все локальны; некоторые из них «случайно» имеют геометрический характер благодаря высокой степени симметрии задачи, а последний член является негеометрическим. При этом отсутствует возможность перенесения всех добавочных геометрических членов в левую часть уравнений гравитационного поля, поскольку они не сохраняются без учета слагаемых, содержащих $\ln R$ и η^{-2} .

В более общем или менее симметричном случае можно ожидать появления не только негеометрических вкладов в $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}}$, но и нелокальных членов: например, если выбрать квантовое состояние более сложного вида или рассматривать анизотропное пространство-время. В разд. 7.3 обсуждается пример, когда нелокальные члены возникают в явном виде.

7.3. Расчет тензора энергии-импульса методом теории возмущений

Точно решаемые модели, полезные для педагогических целей, не очень интересны с точки зрения практических расчетов. Чтобы выйти за рамки таких моделей, приходится обращаться либо к численным расчетам, либо, как в разд. 5.6, к приближенным методам.

Метод теории возмущений, обсуждавшийся в разд. 5.6, оказывается особенно полезным при вычислении $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{рен}}$. Нужно построить итерационное решение уравнения (5.105) для функций χ_k , которые сводятся в in -области к функциям χ_k^{in} , представляющим собой положительно-частотные решения по отношению к конформному вектору Киллинга ∂_η в in -области (см. (5.103)). Далее можно воспользоваться этими решениями для построения функции Грина $G^{(1)}(x'', x') = \langle \text{in}, 0 | \{ \phi(x''), \phi(x') \} | 0, \text{in} \rangle$, где $|0, \text{in}\rangle$ — конформный вакуум в in -области, которую затем следует перенормировать и продифференцировать для нахождения вакуумного среднего от тензора энергии-импульса обычным способом. Дэвис и Унру [140] рассчитали $\langle \text{in}, 0 | T_{\mu\nu} | 0, \text{in} \rangle_{\text{рен}}$ для $h_i = 0$, $m = 0$ с точностью до второго порядка по $(\xi - 1/6)$ и получили выражение

$$\begin{aligned} \langle \text{in}, 0 | T_{\mu\nu} | 0, \text{in} \rangle_{\text{рен}} = & \left(\frac{1}{2880\pi^2} \right) \left\{ -\frac{1}{6} {}^{(1)}H_{\mu\nu} + {}^{(3)}H_{\mu\nu} + \right. \\ & + 10 \left(\xi - \frac{1}{6} \right) {}^{(1)}H_{\mu\nu} + 180 \left(\xi - \frac{1}{6} \right)^2 \left[{}^{(1)}H_{\mu\nu} (1 + \ln C^{1/2}) + C_{\mu\nu} + \right. \\ & + \mathcal{H}_{\mu\nu} \left(C^{-1} \int_{-\infty}^{\eta} \tilde{V}'(\eta_1) \ln(\mu |\eta - \eta_1|) d\eta_1 + \right. \\ & + \frac{1}{2} e_{\mu\nu} C^{-1} \tilde{V}(\eta) \int_{-\infty}^{\eta} \tilde{V}'(\eta_1) \ln(\mu |\eta - \eta_1|) d\eta_1 - \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} e_{\mu\nu} C^{-1} \int_{-\infty}^{\eta} d\eta_1 \int_{-\infty}^{\eta} d\eta_2 \tilde{V}'(\eta_1) \tilde{V}'(\eta_2) \ln(\mu |\eta_1 - \eta_2|) \right] \right\}, \quad (7.53) \end{aligned}$$

где $\tilde{V}(\eta) = R(\eta)C(\eta)$, μ — произвольный масштаб массы, $e_{\mu\nu}$ — тензор, диагональный в декартовых координатах с компонентами $e_{00} = 1$, $e_{ii} = 1/3$; штрихом обозначено дифференцирование функций по их аргументам. Тензорный оператор $\mathcal{H}_{\mu\nu}$ определен следующим образом: $2 \left(\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square + R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} R g_{\mu\nu} \right)$, так что $\mathcal{H}_{\mu\nu}[R(\eta)] = {}^{(1)}\mathcal{H}_{\mu\nu}(\eta)$ (см. (6.53)). Наконец, $C_{\mu\nu}$ — локаль-

ный но негеометрический тензор с компонентами

$$C_{\eta\eta} = C^{-1} \left(-\frac{9}{2} \dot{D} D^2 - \frac{9}{4} D^4 \right),$$

$$C_{xx} = C_{yy} = C_{zz} = C^{-1} \left(6\ddot{D} D + \frac{9}{2} \dot{D}^2 + \frac{9}{2} \dot{D} D^2 - \frac{15}{8} D^4 \right).$$

Выражение (7.53), которое нелокально лишь во втором порядке по $(\xi - 1/6)$, сводится в (5.122) (при $h_i = m = 0$) в out-области $\eta \rightarrow \infty$, если воспользоваться соотношениями (5.102) и $\rho = \langle T_0^0 \rangle = C^{-1} \langle T_{00} \rangle$.

Одним из преимуществ метода теории возмущений является то, что в каждом новом порядке по возмущению поправка к χ_k появляется с дополнительным множителем ω^{-1} (см. (5.105)). Это означает, что расходимости в $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ могут возникать лишь в членах до второго порядка по возмущению. Все более высокие порядки приводят к конечным выражениям, не требующим регуляризации, что делает возможным проведение численных расчетов.

Альтернативный подход состоит в использовании теории возмущений для расчета эффективного действия [197, 268, 269, 271, 304]. Рассмотрим метрику несколько более общего вида

$$ds^2 = C(\eta) [d\eta^2 - (e^{2\beta(\eta)})_{ij} dx^i dx^j], \quad (7.54)$$

где $\beta(\eta)$ — симметричная матрица 3×3 с нулевым следом. Заметим, что с точностью до первого порядка $2\beta_{ii} = h_i$.

Фейнмановская функция Грина для безмассового поля с конформной связью в этом пространстве-времени удовлетворяет уравнению вида

$$\left(\square_x + \frac{1}{6} R_1 \right) D_F(x, x') = -[-g(x)]^{-1/2} \delta^4(x - x') - V D_F(x, x'), \quad (7.55)$$

где \square_x — волновой оператор, R_1 — скалярная кривизна Риччи в приближении точной изотропии, а оператор V обозначает (малые) поправки к этим величинам при учете анизотропии.

Уравнение (7.55) имеет формальное решение вида

$$D_F = D_F^{(0)} + D_F^{(0)} V D_F, \quad (7.56)$$

где $D_F^{(0)}$ — фейнмановский пропагатор в состоянии конформного вакуума (т. е. (3.154) при $n=4$); эта величина является естественным пропагатором в пределе точной изотропии. Выражение для D_F можно аппроксимировать с помощью итераций:

$$D_F = D_F^{(0)} + D_F^{(0)} V D_F^{(0)} + D_F^{(0)} V D_F^{(0)} V D_F^{(0)} + \dots \quad (7.57)$$

и воспользоваться им в (6.25) для разложения $\ln(-D_F)$, чтобы получить ряд теории возмущений для эффективного действия

$$W = \sum_{i=0}^{\infty} W^{(i)}, \quad (7.58)$$

где

$$W^{(0)} = -\frac{1}{2} i \operatorname{tr} [\ln(-D_F^{(0)})], \quad (7.59)$$

$$W^{(1)} = -\frac{1}{2} i \operatorname{tr} (VD_F^{(0)}), \quad (7.60)$$

$$W^{(2)} = -\frac{1}{4} i \operatorname{tr} (VD_F^{(0)}VD_F^{(0)}). \quad (7.61)$$

Член нулевого порядка $W^{(0)}$ рассматривался в разд. 6.3 и давал выражение для тензора энергии-импульса (6.141). Поскольку регуляризованное продолжением по размерности выражение для $D_E^{(0)}(x, x)$ обращается в нуль (см. с. 178), то в первом порядке $W^{(1)} = 0$. Но величина $W^{(2)}$ будучи квадратичной по $D_F^{(0)}$, имеет отличное от нуля значение, регуляризованное продолжением по размерности. Выписывая часть размерно-регуляризованного $W^{(2)}$, имеющую второй порядок по β (в (7.61) присутствуют также члены третьего и четвертого порядков), получаем [271]

$$W^{(2)} = \int d^n x \int d^n x' \beta^{ij}(\eta) K_{ijkl}(x - x') \beta^{kl}(\eta'), \quad (7.62)$$

где

$$K_{ijkl}(x) = (2\pi)^{-n} \int d^n k e^{ik \cdot x - ik_0 \eta_0} \hat{K}_{ijkl}(k), \quad (7.63)$$

$$\begin{aligned} \hat{K}_{ijkl}(k) = & -(1/1920\pi^2) [\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}] (k^2 - k_0^2)^2 \times \\ & \times \left[1/(n-4) + \frac{1}{2} \ln(k^2 - k_0^2) - \text{const} + O(n-4) \right] + \\ & + (\text{члены, не дающие вклада в } W^{(2)}). \end{aligned} \quad (7.64)$$

При получении формулы (7.64) был использован явный вид $G_F^{(0)}$ (в n -мерном случае) и V и результат был разложен в ряд относительно точки $n=4$. Вычисление полюсного вклада приводит к выражению

$$- [1/1920\pi^2(n-4)] \int d^n x (-g)^{1/2} C^{\alpha\beta\gamma\delta} C_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

где $(-g)^{1/2}$ и $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — четырехмерные величины. Это выражение можно переписать в виде (ср. (6.138))

$$- [1/16\pi^2 (n-4)] \int d^4x (-g)^{1/2} \alpha F(x) + O(1), \quad (7.65)$$

где $(-g)^{1/2}$ и F (см. (6.104)) построены из n -мерных величин, а α определяется формулой (6.106). Полусный член в (7.65) можно устранить с помощью перенормировок, как обсуждалось в разд. 6.2, 6.3, что приводит к конечному $W^{(2)}$, в который дают вклад логарифмический член в (7.64) и конечные члены в (7.65) порядка $O(1)$. Расчет показывает, что

$$W_{\text{рен}}^{(2)} = (V/2880\pi^2) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\eta [-(\ddot{a}/a + \dot{a}^2/a^2) \dot{\beta}_{ij} \dot{\beta}^{ij} + \right. \\ \left. + 3 \left[\frac{1}{2} i\pi + \ln a \right] \ddot{\beta}_{ij} \ddot{\beta}^{ij} \right] - 3 \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta' \ddot{\beta}_{ij}(\eta) K(\eta - \eta') \ddot{\beta}^{ij}(\eta') \right\}, \quad (7.66)$$

где V — объем пространства, а $K(\eta) = (1/\pi) \int_0^{\infty} \cos(\omega\eta) \ln(\omega/\mu) d\omega$ (μ — произвольный масштаб массы, введенный при перенормировке).

С помощью функционального дифференцирования ряда теории возмущений для W можно построить вакуумное среднее от тензора энергии-импульса. Оно будет содержать обычные аномальные члены для изотропного случая (6.141), которые обусловлены $W^{(0)}$, а также анизотропные поправки к этим аномальным членам от (7.65) и, наконец, неаномальные члены, возникающие от (7.66), которые можно рассматривать как описывающие вклад частиц, рождающихся за счет возмущения. Эти результаты в явном виде приведены Хартлем и Ху [271].

До сих пор мы не рассматривали граничные условия, содержащиеся неявно в формальном (интегральном) уравнении (7.56) вследствие выбора в качестве $D_F^{(0)}$ фейнмановского пропагатора в состоянии конформного вакуума. Это условие определяет, по какому вакуумному состоянию усредняется тензор энергии-импульса, математическое ожидание которого получается при варьировании (7.58).

Чтобы выяснить этот вопрос, предположим, что анизотропия исчезает в далеком прошлом и будущем и существуют конформно-плоские in- и out-области и соответствующие in- и out-конформные состояния вакуума. Для установления характера граничных условий, содержащихся в (7.56), получим уравнение для оператора поля $\phi(x)$, а не для функции Грина.

Воспользовавшись теоремой Гаусса, можем записать

$$\begin{aligned}
 & - \int d^n y [-g(y)]^{1/2} [K_y D_F^{(0)}(x, y)] T(\phi(y) \phi(x')) = \\
 & = - \int d^n y [-g(y)]^{1/2} D_F^{(0)}(x, y) K_y T(\phi(y) \phi(x')) + \\
 & + \int_{y^0 \rightarrow -\infty} d\Sigma_y^\mu [-g(y)]^{1/2} D_F^{(0)}(x, y) \overleftrightarrow{\nabla}_\mu^y (\phi(y) \phi(x')) - \\
 & - \int_{y^0 \rightarrow -\infty} d\Sigma_y^\mu [-g(y)]^{1/2} D_F^{(0)}(x, y) \overleftrightarrow{\nabla}_\mu^y (\phi(x') \phi(y)) \quad (7.67)
 \end{aligned}$$

(обозначения см. в (3.28)); для общности рассматривается случай n измерений и

$$K_y \equiv \square_y + \frac{1}{4} [(n-2)/(n-1)] R(y). \quad (7.68)$$

Таким образом, функция Грина $D_F^{(0)}$, определенная в (3.154), удовлетворяет уравнению

$$K_y D_F^{(0)}(x, y) = - [-g(y)]^{-1/2} \delta^n(x - y). \quad (7.69)$$

Мы также предполагаем для простоты, что поля исчезают на пространственноподобной бесконечности, так что граничные (пространственные) члены можно опустить.

В конформно-плоских in- и out-областях поле ϕ имеет разложение по модам вида (3.153):

$$\phi(y) \xrightarrow{y^0 \rightarrow -\infty} \sum_k (a_k u_k^{(0)} + a_k^\dagger u_k^{(0)*}), \quad (7.70)$$

$$\phi(y) \xrightarrow{y^0 \rightarrow +\infty} \sum_k (b_k u_k^{(0)} + b_k^\dagger u_k^{(0)*}), \quad (7.71)$$

где $u_k^{(0)}$ — положительно-частотные моды по отношению к конформному времени η , связанные конформным преобразованием с модами (3.151) в плоском пространстве-времени:

$$u_k^{(0)} = C^{(2-n)/4} \bar{u}_k. \quad (7.72)$$

Поскольку между in- и out-областями имеется анизотропная область, операторы a_k и b_k не совпадают. Если использовать их для построения конформных in- и out-состояний вакуума

$$a_k |0, \text{in}\rangle = 0, \quad b_k |0, \text{out}\rangle = 0, \quad (7.73)$$

то это не будет одно и то же состояние.

Воспользовавшись разложением по модам для фейнмановского пропагатора в плоском пространстве, запишем выражение (3.154) в виде

$$iD_F^{(0)}(x, y) = \theta(x^0 - y^0) \sum_k u_k^{(0)}(x) u_k^{(0)*}(y) + \\ + \theta(y^0 - x^0) \sum_k u_k^{(0)*}(x) u_k^{(0)}(y) \rightarrow \\ \xrightarrow{y^0 \rightarrow -\infty} \sum_k u_k^{(0)}(x) u_k^{(0)*}(y), \quad (7.74) \\ \xrightarrow{y^0 \rightarrow +\infty} \sum_k u_k^{(0)*}(x) u_k^{(0)}(y).$$

Используя (7.70), (7.71) и (7.74) в поверхностных членах в (7.67), применяя условия ортонормированности (3.29) и подставляя (7.69) в левую часть (7.67), получаем

$$T(\phi(x)\phi(x')) = - \int d^n y [-g(y)]^{1/2} D_F^{(0)}(x, y) K_y T(\phi(y)\phi(x')) + \\ + \sum_k u_k^{(0)*}(x) b_k^\dagger \phi(x') + \sum_k u_k^{(0)}(x) \phi(x') a_k. \quad (7.75)$$

Если теперь вычислить вакуумное ожидание (7.75) вида $\langle \text{out}, 0 | \dots | 0, \text{in} \rangle$, то два последних члена обратятся в нуль в силу (7.73) и останется выражение

$$D_F(x, x') = - \int d^n y [-g(y)]^{1/2} D_F^{(0)}(x, y) K_y D_F(y, x'), \quad (7.76)$$

где

$$D_F(x, x') = \langle \text{out}, 0 | T(\phi(x)\phi(x')) | 0, \text{in} \rangle. \quad (7.77)$$

Эта величина удовлетворяет n -мерному обобщению уравнения (7.55), а именно

$$K_x D_F(x, x') = - [-g(x)]^{-1/2} \delta^n(x - x') - V D_F(x, x'). \quad (7.78)$$

Подставляя (7.78) в (7.76), окончательно получаем

$$D_F(x, x') = D_F^{(0)}(x, x') + \int d^n y [-g(y)]^{1/2} D_F^{(0)}(x, y) V D_F(y, x'), \quad (7.79)$$

что представляет собой явную форму записи уравнения (7.56). Если бы взяли средние значения от (7.75) вида $\langle \text{in}, 0 | \dots | 0, \text{in} \rangle$ или $\langle \text{out}, 0 | \dots | 0, \text{out} \rangle$, то один из двух поверхностных членов не обратился бы в нуль, и результирующее уравнение отличалось бы от (7.56).

Изложенное выше можно обобщить на случай пространств более сложного вида с сохранением основного результата, т. е.

вывода о том, что уравнение вида (7.56) определяет пропагатор из семейства $\langle \text{out}, 0 | \dots | 0, \text{in} \rangle$. Причина состоит в использовании фейнмановского пропагатора, что формально обеспечивается введением добавочного члена $(-i\epsilon)$ в левую часть (7.55) (см. обсуждение на стр. 84).

Методы решения интегральных уравнений для пропагаторов типа $\langle \text{out} | \dots | \text{in} \rangle$ или $\langle \text{in} | \dots | \text{in} \rangle$ в импульсном представлении разработаны Бирреллом [39] (см. также [37], где рассматривается только случай $\langle \text{out} | \dots | \text{in} \rangle$).

Наконец, совсем иной подход к построению теории возмущений был предложен Горовицем [294], который использовал аксиомы Уолда, изложенные в разд. 6.6, для получения ограничений на структуру (общих) возмущений первого порядка относительно пространства Минковского для тензора энергии-импульса безмассового скалярного поля с конформной связью. Если предположить, что тензор $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ не содержит членов выше четвертого адиабатического порядка (например, членов вида $\square R g_{\mu\nu}$), то можно получить однозначный нелокальный результат в виде некоторого интеграла по изотропному конусу прошлого относительно интересующей нас точки пространства-времени. Этот результат в рамках теории возмущений для $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ был ранее получен в импульсном представлении в работе [100], а его обобщение на случай произвольных возмущений конформно-плоских пространств дано в работе [296]¹⁾.

7.4. Приложения к космологии

Как уже отмечалось в гл. 1, гравитационные эффекты в квантовой теории поля, вероятно, могут быть наблюдаемы лишь вблизи микроскопических черных дыр или на ранних стадиях развития вселенной. Ввиду отсутствия наблюдательных данных, касающихся черных дыр, мы сосредоточим внимание на следствиях квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени для физической космологии.

Большинство специалистов по космологии в настоящее время считают, что вселенная возникла из сингулярности около 15 млрд. лет назад, причем эпоха, начавшаяся через 1 с после большого взрыва, характеризовалась изотропным расширением и термодинамическим равновесием. В предыдущих разделах было показано, что плотность энергии вакуума в космологическом гравитационном поле пропорциональна величинам типа R^2 , которые становятся сравнимы с гравитационными членами в уравнениях Эйнштейна лишь при планковских значениях времени (10^{-43} с). Надежная информация о ранней вселенной не рас-

¹⁾ В этой работе есть ошибка, исправленная авторами в работе [633*] (см. также [635*]). — *Прим. перев.*

пространяется на моменты времени, предшествующие значению 1 с после начала расширения из гипотетического сингулярного состояния; поэтому обсуждаемые в этой книге эффекты вряд ли когда-либо будут непосредственно наблюдаемыми. Но существуют косвенные методы проверки некоторых из модельных предсказаний.

Квантово-гравитационные эффекты для ранней вселенной приводят к возрастанию энтропии вследствие рождения частиц. Кроме того, обратное воздействие квантовых эффектов через индуцируемый гравитационным полем тензор энергии-импульса изменяет динамику расширения. В частности, любая начальная анизотропия и неоднородность, по-видимому, должна приводить к более обильному рождению частиц (разд. 5.6) и к более сильной поляризации вакуума (разд. 7.3). Поэтому обратное воздействие должно приводить к сильному затуханию начальной турбулентности и нерегулярности. Высокая степень крупномасштабной однородности и изотропии вселенной, наблюдаемая в настоящее время, означает, что либо начальная анизотропия и неоднородность были эффективно сглажены, либо расширение с самого начала характеризовалось столь высокой степенью однородности и изотропии, которая кажется априори совершенно невероятной [397].

Бэрроу и Мацнер [24] на основании весьма общих соображений показали, что производство энтропии на один барион при диссипации космологической анизотропии сильно зависит от того, в какой момент времени начинается эпоха диссипации. Анизотропные возмущения можно рассматривать как некоторую жидкость, плотность энергии которой изменяется с космологическим масштабным фактором как a^{-6} [361]. С другой стороны, плотность энергии излучения ведет себя как a^{-4} . Следовательно, энтропия, возникающая при затухании анизотропии, изменяется как a^{-2} . Чем раньше начинается эпоха диссипации, тем больше производство энтропии.

Эффективность квантово-гравитационных процессов, как объяснялось выше, возрастает с приближением к сингулярности ($a \rightarrow 0$), откуда следует, что эти эффекты будут приводить к большому производству энтропии при очень малых значениях времени (оценки см. в работах [219, 350]). Поскольку второе начало термодинамики запрещает последующее уменьшение этой космической энтропии, наблюдаемое значение энтропии, приходящейся на один барион, можно использовать для получения ограничений на начальную анизотропию. (Мы предполагаем, что вселенная имеет фиксированное число барионов, отличное от нуля. Некоторые из современных калибровочных теорий предсказывают несохранение барионного заряда в условиях, которые должны были иметь место в ранней вселенной.

В таком случае величина энтропии, приходящейся на один барион, перестает быть параметром, по которому можно судить о начальной анизотропии.)

Для оценки порядка интересующих нас величин можно воспользоваться результатами теории возмущений, развитой в разд. 5.6. Выражение (5.122) определяет плотность энергии рожденных безмассовых частиц в out-области, когда анизотропия h_i и неконформная связь V исчезают. Если h_i и V заметно отличны от нуля лишь на некотором малом интервале конформного времени около η_0 , то медленным изменением логарифмического множителя в подинтегральном выражении можно пренебречь, и в результате приближенного интегрирования в (5.122) найти

$$\rho a^4 = \text{const} \times [60 (\xi - 1/6)^2 R^2(\eta_0) + C^{\alpha\beta\gamma\delta}(\eta_0) C_{\alpha\beta\gamma\delta}(\eta_0)],$$

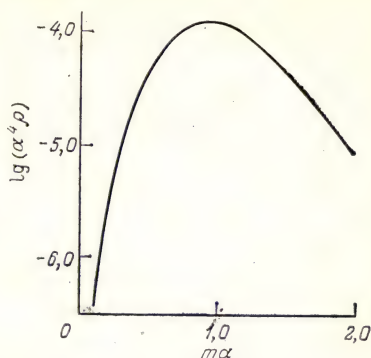
где постоянная представляет собой численный множитель порядка единицы.

На основании элементарных соображений трудно себе представить, чтобы пространство-время могло избежать появления в планковскую эпоху значений R^2 и $C^{\alpha\beta\gamma\delta}C_{\alpha\beta\gamma\delta}$, сравнимых с планковскими значениями, просто за счет квантовых флуктуаций метрики. Поэтому даже пренебрегая последующим нарушением конформной симметрии, можно ожидать, что ρ будет иметь порядок планковской плотности энергии в планковский момент времени с соответствующим красным смещением к настоящему моменту времени (по крайней мере для гравитонов, см. [32, 257]). В термодинамических терминах планковская температура (10^{32} K) в планковский момент времени, испытав красное смещение, приводит к температуре теплового фона в настоящее время порядка нескольких кельвинов [386], которая действительно наблюдается для реликтового излучения. Таким образом, можно прийти к заключению, что наблюдаемое значение энтропии, приходящейся на один барион, не на много превышает минимальное значение, соответствующее квантовым флуктуациям метрики в планковскую эпоху.

Дальнейшее подтверждение того, что крупномасштабные нерегулярности не могут сохраняться за пределами планковской эпохи, следует из вычислений эффектов обратной реакции, проведенных рядом авторов [272, 306, 345, 503] (см. также [269, 304]). Как показано в этих работах, для анизотропных моделей пространства-времени затухание происходит очень быстро, за время порядка планковского.

Иногда квантово-полевые эффекты привлекаются при попытках найти механизм, благодаря которому вселенная могла бы избежать первоначальной сингулярности [130, 358, 368, 389, 392, 410]. Конечно, такая вселенная имела бы бесконечный возраст со всеми вытекающими отсюда термодинамическими проблемами.

Рис. 23. Зависимость плотности энергии конформно-связанных скалярных частиц, рожденных в космологической модели с временной зависимостью (7.80), от массы частицы.



ми (см., например, [127]). Теоремы Хокинга — Пенроуза (обзор и ссылки см. в работе [287]) существенно опираются на так называемые энергетические условия. В пространствах Робертсона — Уокера одно из таких условий сводится к требованию $\rho + 3p > 0$. Но, как мы видели, квантовые эффекты делают возможными появление при определенных условиях отрицательных значений p и ρ , и можно предположить, что при достаточно большой плотности вселенная испытывает «отскок», вместо того чтобы достигать сингулярности. Такие модели рассмотрены в разд. 3.4, 3.5.

При отсутствии в теории другого параметра с размерностью длины кажется вероятным, что «отскок» может происходить при временах порядка планковского. К сожалению, это тот случай, когда однопетлевое приближение перестает быть надежным. Делались попытки найти решения уравнений гравитационного поля с источником $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ для безмассового конформно-инвариантного поля, выражение для которого получено в разд. 6.3 [130, 197, 440]. Анализ существенно усложняется из-за наличия членов вида $^{(1)}H_{\mu\nu}$ и $^{(2)}H_{\mu\nu}$.

Если в теории имеется другой масштаб длины, помимо планковского, то «отскок» может произойти и вне планковской области. На первый взгляд не равная нулю масса полевых квантов (типичное значение 10^{-24} г, что соответствует комптоновскому времени 10^{-23} с) могла бы привести к существенному изменению динамики гравитационного поля на расстояниях и при временах, на много порядков величины превышающих планковские значения. Действительно, как было показано в работе [389], при специальном выборе квантового состояния такая возможность может осуществляться. Но в общем случае влияние массы пренебрежимо мало по сравнению с другими механизмами нарушения конформной инвариантности [43]. Причина состоит в том, что члены в $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ вида $m^2 R$ превышают члены вида R^2 лишь при $m^2 > R \sim t^{-2}$, т. е. когда t больше комптоновского времени

частицы. Но в столь поздние моменты времени квантово-гравитационные эффекты оказываются в любом случае пренебрежимо малыми.

Своего рода резонансный эффект возникает при $t \sim m^{-1}$. Этот резонансный эффект можно исследовать, воспользовавшись теорией возмущений, развитой в разд. 5.6, на примере модели массивного скалярного поля с конформной связью в пространственно-плоской вселенной Робертсона — Уокера с масштабным фактором

$$a(\eta) = 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 / (\alpha^2 + \eta^2), \quad \alpha = \text{const.} \quad (7.80)$$

Это пространство-время сжимается до минимального значения масштабного фактора, «отскакивает» и затем снова расширяется, испытывая наиболее быстрое расширение (со скоростью $\sim \alpha^{-1}$) при $\eta \sim \alpha$. Подставив выражение (5.106) при $C = a^2$ ($h_i = 0$, $\xi = 1/6$) в (5.111), найдем коэффициент Боголюбова β и получим для плотности энергии следующее выражение [43]:

$$\rho = \frac{am^5}{2048} \left\{ \frac{1}{4} \alpha^3 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} [\alpha^{-1} K_1(4m\alpha)] + 7 \frac{\partial}{\partial \alpha} [\alpha K_1(4m\alpha)] + 49 K_1(4m\alpha) \right\}. \quad (7.81)$$

График зависимости $\alpha^4 \rho$ от $m\alpha$ приведен на рис. 23; на нем виден резонанс при $m\alpha \sim 1$. Это означает, что плотность энергии максимальна, если время наиболее быстрого расширения (т.е. наиболее интенсивного рождения частиц) порядка комптоновского времени.

Фундаментальная длина может войти в теорию и другим путем, если учитывать негравитационные взаимодействия. Например, в феноменологической теории распада π -мезона вводится константа связи, имеющая размерность длины. Влияние обратной реакции таких взаимодействий на гравитационное поле может стать большим при масштабах, соответствующих этой характерной длине, а не планковской длине [45].

Величина квантовых эффектов для ранней вселенной до известной степени зависит от выбора квантового состояния, о котором мы ничего не знаем. В отсутствие каких-либо наблюдательных данных приходится прибегать к чисто математическим критериям (см., например, работу [111], где для выбора определенного квантового состояния использовалось аналитическое продолжение)¹⁾.

В современную эпоху рождение частиц и вакуумные эффекты пренебрежимо малы [380—382].

¹⁾ В последнее время разработаны более детальные «сценарии» развития ранней вселенной с учетом рождения частиц и поляризации вакуума [634*, 636*] (см. также библиографию). — *Прим. перев.*

КВАНТОВЫЕ ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ

В январе 1974 г. Хокинг [277] сформулировал свое знаменитое утверждение, что черные дыры на самом деле не совсем черные, а вследствие квантовых эффектов испускают излучение с тепловым спектром. Этот результат оказался важнейшим событием в развитии теории квантованных полей в искривленном пространстве-времени и привлек внимание многих исследователей к этому вопросу. Посвящая квантовым черным дырам целую главу, мы учитываем широкий интерес к замечательному открытию Хокинга.

Завершив представление всех основных аспектов квантовой теории свободных полей в искривленном пространстве-времени, мы здесь используем различные методы, описанные в предыдущих главах. Основной результат, а именно, что гравитационное возмущение, создаваемое коллапсирующей звездой, приводит к появлению выходящего теплового потока излучения, легко воспроизвести. Длина волны излучения, покидающего поверхность звезды, коллапсирующей с образованием черной дыры, как хорошо известно, экспоненциально возрастает. Поэтому представляется вероятным, что стандартные моды входящего поля после прохождения внутренней области звезды и выхода с противоположной стороны также будут испытывать экспоненциальное красное смещение. Не представляет труда показать, что боголюбовское преобразование между этими модами, испытавшими экспоненциальное красное смещение, и стандартными выходящими комплексными экспоненциальными модами имеет планковскую структуру. Это означает, что состояние *in*-вакуума содержит тепловой поток уходящих частиц.

К сожалению, решения волнового уравнения в фоновой метрике коллапсирующей звезды не удастся выразить через известные функции, поэтому для выявления экспоненциального красного смещения мод мы воспользуемся двумя упрощенными моделями. Первая представляет собой двумерную модель гравитационного коллапса, в которой выбрана метрика, соответствующая сферически-симметричному телу, сжимающемуся по произвольному закону с уходом под горизонт событий. Вторая модель возникает в результате пренебрежения обратным рассеянием в четырехмерной картине.

Двумерная модель обладает тем дополнительным преимуществом, что для нее можно вычислить перенормированный тензор энергии-импульса во всех точках пространства-времени, что способствует пониманию физических явлений, связанных с эффектом Хокинга вблизи горизонта и внутри черной дыры. Она также приводит к любопытной связи эффекта Хокинга с конформной аномалией. Мы отводим место также обсуждению вопросов о том, где рождаются частицы и каким образом черная дыра теряет массу.

Представлена также более изящная теория квантовых черных дыр, в которой не рассматривается фаза коллапса, а вместо этого вводятся соответствующие граничные условия на горизонте прошлого для максимально расширенного многообразия. Это позволяет глубже понять тесную связь между существованием горизонта событий и тепловыми свойствами черных дыр, а также приводит к установлению аналогии между черной дырой и рассмотренной в гл. 4 системой Риндлера. Хотя наибольший интерес к квантовым черным дырам связан с астрофизическими и термодинамическими приложениями, мы ограничились при обсуждении этих вопросов лишь краткими замечаниями. В то же время мы даем многочисленные ссылки на оригинальные работы.

8.1. Рождение частиц коллапсирующим сферическим телом

Рассмотрим сферически-симметричное тело в свободном пространстве. Во внешней области единственное сферически-симметричное решение уравнений Эйнштейна есть решение Шварцшильда, описываемое метрикой (3.18). Мы не интересуемся здесь метрикой внутреннего решения, поскольку она оказывается в данной задаче несущественной.

Известно (см., например, [363] гл. 31), что если тело имеет достаточно малый радиус, то оно начинает катастрофически сжиматься, образуя шварцшильдову черную дыру. Внешняя метрика в процессе коллапса не изменяется, но моды квантованного поля, проходящие через *внутренность* шара, испытывают сильные возмущения. Поэтому можно ожидать, что будет иметь место рождение частиц.

Если предположить, что в отдаленном прошлом шар достаточно велик, так что пространство-время приближенно можно считать плоским, то можно построить стандартное состояние вакуума в пространстве Минковского. После коллапса пространство-время будет шварцшильдовым, и в этой *out*-области вакуум уже не будет совпадать с вакуумом Минковского, построенным в *in*-области. Для расчета рождения частиц необхо-

димо вычислить коэффициенты боголюбовского преобразования, связывающего вакуумные in- и out-состояния.

Мы будем следовать здесь работам Хокинга [278] и Паркера [385, 387], ограничивая рассмотрение случаем безмассового скалярного поля. Поскольку для пространства Шварцшильда $R = 0$ (и результаты не зависят от метрики внутри шара), при расчете коэффициентов Боголюбова нет необходимости различать случаи конформной и минимальной связи.

Моды, представляющие собой решения волнового уравнения $\square\phi = 0$ в пространстве-времени Шварцшильда, имеют вид

$$r^{-1}R_{\omega l}(r)Y_{lm}(\theta, \phi)e^{-i\omega t}, \quad (8.1)$$

где Y_{lm} — сферические гармоники, а радиальные функции R удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2 R_{\omega l}}{dr^{*2}} + \{\omega^2 - [l(l+1)r^{-2} + 2Mr^{-3}][1 - 2Mr^{-1}]\} R_{\omega l} = 0 \quad (8.2)$$

(координата r^* определена на с. 46). В асимптотической области $r \rightarrow \infty$ уравнение (8.2) имеет решения $e^{\pm i\omega r}$, и выражение (8.1) в изотропных координатах $u = t - r^*$, $v = t + r^*$ принимает вид

$$r^{-1}Y_{lm}e^{-i\omega u} \quad \text{и} \quad r^{-1}Y_{lm}e^{-i\omega v}. \quad (8.3), (8.4)$$

Из-за наличия «потенциала» в квадратных скобках в (8.2) стандартные входящие волны (8.4) частично рассеиваются назад гравитационным полем, превращаясь в суперпозицию падающих и отраженных волн. К счастью, если мы ограничиваемся наблюдениями в асимптотической области ($r \rightarrow \infty$), то построение точного решения уравнения (8.2) оказывается излишним.

Следуя общей теории, развитой в гл. 3, разложим поле ϕ по полному набору положительно-частотных мод, которые обозначим $f_{\omega lm}$:

$$\phi = \sum_{l, m} \int d\omega (a_{\omega lm} f_{\omega lm} + a_{\omega lm}^{\dagger} f_{\omega lm}^*), \quad (8.5)$$

где моды $f_{\omega lm}$ нормированы в соответствии с условием (3.29), т. е.

$$(f_{\omega_1 l_1 m_1}, f_{\omega_2 l_2 m_2}) = \delta(\omega_1 - \omega_2) \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2}, \quad (8.6)$$

и выбраны так, что в отдаленном прошлом они переходят в сходящиеся сферические волны (8.4). В качестве квантового состояния выбираем in-вакуум, определяемый условием

$$a_{\omega lm}|0\rangle = 0, \quad \forall \omega, l, m, \quad (8.7)$$

которое соответствует отсутствию входящих частиц из \mathcal{I}^- .

Чтобы найти вид решений $f_{\omega lm}$ в будущем, заметим сначала, что входящие волны (8.4) сходятся к центру шара, через

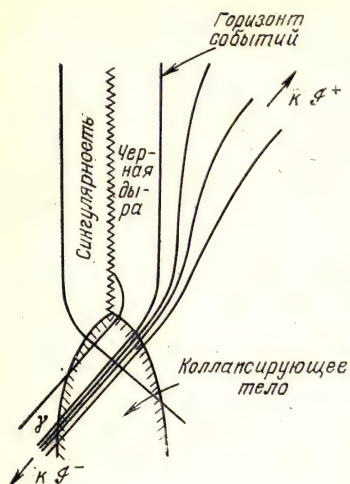


Рис. 24. По мере приближения коллапсирующего сферического тела к сингулярности сходящиеся из \mathcal{I}^- к его центру изотропные лучи претерпевают искажение. Один из них γ образует горизонт событий, представляющий собой границу между предшествующими лучами, которые уходят на \mathcal{I}^+ , и более поздними лучами, которые попадают на сингулярность. Лучи, эквидистантные на \mathcal{I}^+ в поздние моменты времени, сгущаются вокруг луча γ вблизи \mathcal{I}^- .

который они проходят, превращаясь в расходящиеся сферические волны. Приближаясь к поверхности шара, падающие волны испытывают голубое смещение, а при выходе после прохождения сквозь шар — красное смещение. В случае статического тела эти два эффекта в точности компенсируют друг друга, а волны достигают \mathcal{I}^+ , имея форму (8.3). Но если тело коллапсирует, то за время, пока волны распространяются внутри него, оно сжимается, и его поверхностная гравитация возрастает. Поэтому выходящие волны испытывают большее красное смещение, чем это требуется для компенсации голубого смещения на входе. Если тело испытывает полный гравитационный коллапс с образованием черной дыры, временной масштаб сжатия имеет тот же порядок величины, что и время прохождения света через тело; поэтому избыточное красное смещение становится заметным. Мы увидим ниже, что красное смещение возрастает экспоненциально, причем время изменения в e раз оказывается порядка времени прохождения.

Эта ситуация схематически изображена на рис. 24, где показан шар, коллапсирующий с образованием сингулярности. Некоторые входящие изотропные лучи показаны проходящими через центр коллапсирующего тела и выходящими с противоположной стороны. Существует последний выходящий луч, обозначенный через γ , который еще успевает пройти через коллапсирующее тело и достичь \mathcal{I}^+ с противоположной стороны. Этот луч образует горизонт событий вокруг черной дыры. Более поздние лучи проходят через горизонт, но уже не достигают \mathcal{I}^+ , а попадают в сингулярность. Важно отметить, что прямым взаимодействием квантованного поля с веществом коллапсирующего

тела мы здесь пренебрегаем. Роль вещества в этой модели выражается лишь в создании соответствующего гравитационного поля.

Чтобы найти вид мод, испытавших красное смещение и достигающих \mathcal{I}^+ , опустим угловые переменные и рассмотрим двумерную модель коллапсирующего тела, которая оказывается весьма полезной. Вне шара элемент длины имеет вид

$$ds^2 = C(r) du dv, \quad (8.8)$$

где теперь

$$u = t - r^* + R_0^*, \quad v = t + r^* - R_0^*, \quad (8.9)$$

$$r^* = \int C^{-1} dr, \quad (8.10)$$

$R_0^* = \text{const}$. Внутри шара возьмем элемент длины общего вида

$$ds^2 = A(U, V) dU dV, \quad (8.11)$$

где A — произвольная гладкая несингулярная функция, а

$$U = \tau - r + R_0, \quad V = \tau + r - R_0. \quad (8.12)$$

Связь между R_0 и R_0^* такая же, как и между r и r^* (8.10). Внешняя метрика (8.8) выбирается так, что $C \rightarrow 1$ и $\partial C / \partial r \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Горизонт событий находится при некотором значении переменной r , для которого $C = 0$ (предполагается, что пространство-время несингулярно вне горизонта). Например, для $C = 1 - 2Mr^{-1}$ горизонт событий расположен при $r = 2M$, что представляет собой двумерную модель шварцшильдовой черной дыры. Аналогично $C = 1 - 2Mr^{-1} + e^2 r^{-2}$ моделирует черную дыру Рейсснера — Нордстрема. Однако на этом этапе рассуждений нет необходимости уточнять вид функции $C(r)$.

До момента $\tau = 0$ шар находится в покое, и его поверхность соответствует $r = R_0$. При $\tau > 0$ будем считать, что поверхность сжимается вдоль мировой линии $r = R(\tau)$. Оказывается, что для поздних моментов времени на \mathcal{I}^+ (т. е. при больших u) точная форма функций $A(U, V)$ и $R(\tau)$ несущественна. Координаты (8.9) и (8.12) выбраны так, чтобы в момент начала коллапса $\tau = t = 0$ на поверхности шара $u = U = v = V = 0$.

Для того, чтобы смоделировать сферическую симметрию четырехмерного случая, можно применить отражение метрики (8.8) и (8.11) относительно начала пространственных координат $r = 0$. Иначе можно ограничить изменение этой координаты областью $r \geq 0$ и отражать изотропные лучи в точке $r = 0$. Это воспроизводит прохождение радиального луча через центр шара с выходом наружу. Такое отражение достигается в результате наложения граничного условия $\phi = 0$ при $r = 0$,

Уравнения, выражающие связь внутренних и внешних координат, запишем в виде

$$U = \alpha(u), \quad (8.13)$$

$$v = \beta(V), \quad (8.14)$$

пренебрегая эффектами отражения на поверхности шара. Точная форма функций α и β будет определена ниже. Центр шара находится на линии

$$V = U - 2R_0. \quad (8.15)$$

Нам нужно построить решения двумерного волнового уравнения

$$\square \phi = 0,$$

обращающиеся в нуль вдоль линии (8.15) и сводящиеся к стандартным экспонентам на \mathcal{I}^- . Построение решения облегчается благодаря конформной симметрии. Заметив, что, согласно (8.15), при $r = 0$

$$v = \beta(V) = \beta(U - 2R_0) = \beta[\alpha(u) - 2R_0],$$

и учитывая (4.43), можем записать решение в виде

$$i(4\pi\omega)^{-1/2} (e^{-i\omega v} - e^{-i\omega\beta[\alpha(u) - 2R_0]}). \quad (8.16)$$

Таким образом, оказывается, что простая «входящая» (движущаяся влево) волна $e^{-i\omega v}$ превращается коллапсирующим телом в сложную «выходящую» (движущуюся вправо) волну $\exp\{-i\omega\beta[\alpha(u) - 2R_0]\}$.

Из физических соображений можно ожидать, что фазовый множитель $\beta[\alpha(u) - 2R_0]$ должен соответствовать стационарно возрастающему красному смещению, когда поверхность шара приближается к горизонту событий. Для нахождения формы этого множителя, описывающего красное смещение, необходимо сшить внутреннюю и внешнюю метрики на поверхности коллапсирующего тела $r = R(\tau)$. Это приводит к уравнениям

$$\alpha'(u) = \frac{dU}{du} = (1 - \dot{R})C \{[AC(1 - \dot{R}^2) + \dot{R}^2]^{1/2} - \dot{R}\}^{-1}, \quad (8.17)$$

$$\beta'(V) = \frac{dv}{dV} = C^{-1}(1 + \dot{R})^{-1} \{[AC(1 - \dot{R}^2) + \dot{R}^2]^{1/2} + \dot{R}\}, \quad (8.18)$$

где \dot{R} обозначает $dR/d\tau$, а U , V и C берутся при $r = R(\tau)$. Заметим, что для коллапсирующего тела $R < 0$, поэтому $(R^2)^{1/2} = -R$.

Когда поверхность шара приближается к горизонту событий, C стремится к нулю, а уравнения (8.17), (8.18) упрощаются

ся и принимают вид

$$\frac{dU}{du} \sim \frac{(\dot{R} - 1)}{2\dot{R}} C(R), \quad (8.19)$$

$$\frac{dv}{dV} \sim \frac{A(1 - \dot{R})}{2\dot{R}}. \quad (8.20)$$

Вблизи точки $C = 0$ можно разложить $R(\tau)$ в ряд:

$$R(\tau) = R_h + v(\tau_h - \tau) + O((\tau_h - \tau)^2), \quad (8.21)$$

где $R = R_h$ на горизонте, $\tau = \tau_h$ при $R(\tau) = R_h$, а $-v = \dot{R}(\tau_h)$. Тогда, проинтегрировав (8.19), с точностью до $O(\tau_h - \tau)$ получаем

$$\kappa u = -\ln|U + R_h - R_0 + \tau_h| + \text{const}, \quad (8.22)$$

где величина

$$\kappa = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial C}{\partial r} \right|_{r=R_h} \quad (8.23)$$

называется поверхностной гравитацией черной дыры [101].

Из соотношения (8.22) видно, что при $U \rightarrow \tau_h + R_0 - R_h$ имеем $u \rightarrow \infty$. Обращение этого соотношения дает

$$U \sim e^{-\kappa u} + \text{const} \quad (8.24)$$

для поздних моментов времени на \mathcal{I}^+ .

Эта ситуация показана на диаграмме Пенроуза (рис. 25). Изотропный луч $u = \infty$, изображающий горизонт событий черной дыры, соответствует внутри коллапсирующего тела изотропному лучу $U = \tau_h + R_0 - R_h$. Соответствующий «входящий» луч из \mathcal{I}^- , помеченный символом γ , является последним лучом, который может пройти через точку $r = 0$ и достичь \mathcal{I}^+ . Лучи, отвечающие более поздним моментам времени, попадают в сингулярность. Изотропные лучи $u = \text{const}$, взятые при больших значениях u , при их продолжении назад во времени и отражении в сторону \mathcal{I}^- сгущаются около последнего луча γ (что напоминает рис. 12). Наоборот, очень узкая область значений v и V отвечает целой асимптотической области на \mathcal{I}^+ , соответствующей поздним моментам времени. Следовательно, рассматривая картину с точки зрения асимптотического наблюдателя в поздние моменты времени u , мы можем при интегрировании уравнения (8.20) считать величину A постоянной; в результате получим

$$v \sim \text{const} - AV(1 + v)/2v. \quad (8.25)$$

Подставляя (8.24) и (8.25) в (8.16), найдем выражение для мод в поздние моменты времени

$$i(4\pi\omega)^{-1/2} (e^{-i\omega v} - e^{i\omega(ce^{-\kappa u} + d)}), \quad (8.26)$$

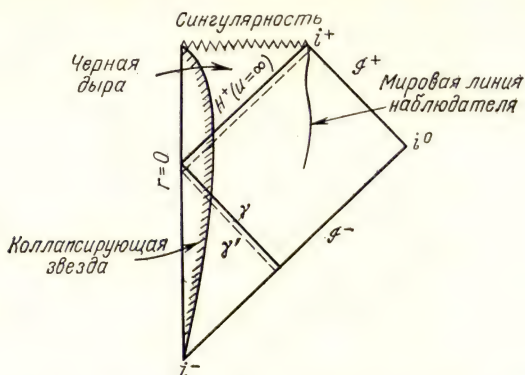


Рис. 25. Диаграмма Пенроуза пространства-времени звезды, коллапсирующей с образованием черной дыры. Внешняя область представляет собой часть пространства, изображенного на рис. 6, включая участки областей I и III. Изотропный луч γ проходит через центр звезды и, выходя из нее, образует горизонт событий ($u = \infty$), обозначенный H^+ , как на рис. 24. Луч γ' (штриховая линия), непосредственно предшествующий γ на \mathcal{F}^- , достигает \mathcal{F}^+ при конечном u . С учетом конформного сжатия \mathcal{F} очевидно, что все бесконечное будущее наблюдателя, находящегося вне черной дыры, соответствует узкой полосе изотропных лучей между γ и γ' , отвечающей малому промежутку времени на \mathcal{F}^- . Следовательно, бесконечное число эквидистантных изотропных лучей $u = \text{const}$ в поздние моменты времени при продолжении назад через звезду на \mathcal{F}^- будут сгущаться около γ внутри этой узкой полосы.

где s и d — постоянные. Нетрудно видеть, что «выходящие» изотропные лучи испытывают экспоненциально возрастающее красное смещение с увеличением в e раз за время κ^{-1} , что в точности соответствует красному смещению излучения, испускаемого с поверхности коллапсирующего шара (см., например, [363], § 32.3).

Выражение (8.26) имеет тот же вид, что и результат подстановки формулы (4.52) в (4.43) для зеркала, движущегося вдоль траектории с асимптотикой вида (4.51). Преобразование Боголюбова в обоих случаях одно и то же. Причину можно усмотреть в том, что в случае черной дыры расчет основывается на геометрической оптике. Распространение полевых мод внутри коллапсирующей «звезды» аналогично с геометрической точки зрения их отражению от удаляющегося зеркала. В последнем случае доплеровский сдвиг воспроизводит тот же эффект, к которому приводит гравитационное красное смещение для мод поля. Более того, функция $\ln \text{ch}$, задающая траекторию зеркала с асимптотикой вида (4.51), совпадает с траекторией частицы, падающей в черную дыру, в координатах (r^*, t) [135].

Из общей теории, развитой в гл. 3, следует, что, поскольку полевые моды сводятся к стандартной форме на \mathcal{F}^- , инерциаль-

ный детектор в области \mathcal{I}^- не будет обнаруживать частиц в вакуумном состоянии, построенном с их помощью (т. е. в состоянии in-вакуума). Однако в силу более сложной формы волн (8.26) инерциальный детектор на \mathcal{I}^+ в out-области будет регистрировать частицы в этом состоянии. Более того, поскольку сложный фактор, соответствующий красному смещению, содержит лишь часть решения, зависящую от u , эти частицы будут выходящими (т. е. движущимися вправо в двумерной модели), что соответствует потоку частиц от черной дыры наружу.

Спектральное распределение этого излучения может быть рассчитано обычным образом с помощью боголюбовского преобразования между модами (8.26) и стандартными экспоненциальными решениями в out-области. Впервые это было сделано Хокингом [277, 278]. Нет необходимости повторять здесь эти вычисления, поскольку они математически тождественны с проведенными в разд. 4.4 для случая попятно движущегося зеркала (см. сделанные выше замечания). Из формулы (4.61) мы знаем, что ожидаемый спектр будет планковским, соответствующим тепловому излучению черного тела при температуре

$$T = \kappa / (2\pi k_B). \quad (8.27)$$

Для вычисления боголюбовских коэффициентов в разд. 4.4 оказалось удобно выбрать поверхность интегрирования лежащей в in-области. Это означает, что функцию $p(u)$ следовало обратить, чтобы получить $f(v)$ в (4.58). Физически это соответствует выбору стандартных выходящих волн на \mathcal{I}^+ , которые на \mathcal{I}^- принимают вид более сложных функций координаты v . Обращая функцию (8.26) (с точностью до фазового множителя), для мод такого типа получим выражение

$$i(4\pi\omega)^{-1/2} \{e^{i\omega\kappa^{-1} \ln[(v_0-v)/c]} - e^{-i\omega u}\}, \quad v < v_0, \quad (8.28)$$

где v_0 — постоянная, соответствующая последнему изотропному лучу γ . Сгущение входящих лучей около γ выражается в быстром изменении фазы в (8.28) при $v \rightarrow v_0$.

Расчет для четырехмерного случая, выполненный в работе Хокинга [278], по существу не отличается от приведенного выше для двумерной модели. Основной результат — существование потока частиц от черной дыры с тепловым спектром при температуре (8.27) — остается тем же. Однако в четырехмерном случае возникает ряд технических осложнений, на которых мы кратко остановимся здесь. Решения $R_{\omega l}(r)$ радиального уравнения (8.2) оказывается невозможным выразить через известные функции, хотя свойства этих решений были исчерпывающим образом изучены в работах [59, 60, 88, 375, 400, 407, 441, 453, 454] (см. также [60] для случая спина $1/2$).

Уравнение (8.2) имеет вид одномерного волнового уравнения с потенциалом (квадратные скобки). С физической точки зрения этот потенциал приводит к возникновению отраженных волн, что можно понимать как обратное рассеяние полевых мод на кривизне пространства-времени. В случае коллапсирующего шара некоторые входящие возмущения будут превращаться в выходящие в результате обратного рассеяния, а не после прохождения через внутреннюю область шара. Поскольку интересующий нас эффект связан именно с вкладом проходящих волн, мы временно пренебрежем обратным рассеянием, опуская потенциал в (8.2). Тогда радиальные функции сводятся к обычным экспонентам, и нормированные моды принимают простой вид

$$\frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{(8\pi^2\omega)^{1/2}r} \times \begin{cases} e^{-i\omega u}, \\ e^{-i\omega v}, \end{cases} \quad (8.29)$$

$$(8.30)$$

который при больших r совпадает с соответствующей формой для плоского пространства-времени, когда $u \equiv t - r^* \rightarrow t - r$, $v \equiv t + r^* \rightarrow t + r$.

Нас интересуют специальные линейные комбинации мод (8.30), которые совпадают со стандартными модами на \mathcal{I}^+ . Если продолжить эти решения назад во времени [378] через коллапсирующее тело и далее вдоль входящего изотропного луча на \mathcal{I}^+ , то для моды, которая на \mathcal{I}^+ имеет вид (8.29), получим

$$\frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{(8\pi^2\omega)^{1/2}r} \exp\{4Mi\omega \ln[(v_0 - v)/c]\}, \quad v < v_0, \quad (8.31)$$

$$0, \quad v > v_0$$

(c — постоянная) вблизи последнего входящего луча γ на рис. 24. Сходство между (8.31) и (8.28) очевидно.

Обычный in-вакуум определяется по отношению к модам (8.30). Коэффициенты Боголюбова, связывающие (8.30) и (8.31), определяются выражениями

$$\left. \begin{matrix} \alpha_{\omega\omega'} \\ \beta_{\omega\omega'} \end{matrix} \right\} = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{v_0} dv (\omega'/\omega)^{1/2} e^{\pm i\omega'v} \exp\{4Mi\omega \ln[(v_0 - v)/c]\}. \quad (8.32)$$

Интегралы в правой части можно вычислить в терминах Γ -функций [278]; ответ совпадает с (4.60). В этом случае также наличие множителя $(\omega')^{-1/2}$ приводит к логарифмической расходимости выражения $\int |\beta_{\omega\omega'}|^2 d\omega'$. Число частиц в каждой моде на \mathcal{I}' оказывается бесконечным. Расходимость здесь связана с нормировкой мод (8.29) — (8.31) непрерывного спектра. Коллапсирующее тело дает постоянный поток излучения на \mathcal{I}^+ , поэтому полное число частиц за все время бесконечно велико. Большой

интерес представляет число частиц, испускаемых в единицу времени. Эту величину можно найти, рассматривая систему, помещенную в ящик с периодическими граничными условиями, что делает моды дискретными [375].

В этом случае из условия постоянства вронскиана (3.39) находим

$$\sum_{\omega} (|a_{\omega\omega'}|^2 - |\beta_{\omega\omega'}|^2) = 1. \quad (8.33)$$

Вычисление интегралов в (8.32) показывает, что (см. (4.60))

$$|a_{\omega\omega'}|^2 = e^{8\pi M\omega} |\beta_{\omega\omega'}|^2 \quad (8.34)$$

(соображения об аналитичности, приводящие к множителю $e^{8\pi M\omega}$, аналогичны рассмотренным на с. 124).

Чтобы подсчитать поток частиц, попадающих на \mathcal{I}^+ в поздние моменты времени, заметим, что число состояний внутри сферы радиуса R с центром, совпадающим с центром коллапсирующего шара, равно $Rd\omega/2\pi$ (для фиксированных l, m). Как следует из (8.33) и (8.34), число частиц в каждой моде равно

$$N_{\omega lm} = \sum_{\omega'} |\beta_{\omega\omega'}|^2 = 1/(e^{8\pi M\omega} - 1), \quad (8.35)$$

поэтому число частиц, испускаемых в единицу времени в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$, которые проходят через поверхность сферы, равно

$$(d\omega/2\pi)(e^{8\pi M\omega} - 1)^{-1}, \quad (8.36)$$

где мы воспользовались тем, что время, за которое частица достигает поверхности сферы, равно R . Это планковский спектр излучения черного тела с температурой (8.27), совпадающей с температурой в двумерном случае. Альтернативный способ вывода этой формулы основан на рассмотрении волновых пакетов в качестве базисных состояний вместо (8.29) — (8.31) [278].

На этом этапе следует учесть обратное рассеяние, которым мы до сих пор пренебрегали. Равенство (8.33) можно интерпретировать как условие сохранения вероятности. Влияние обратного рассеяния сводится к появлению множителя $1 - \Gamma_{\omega}$ в выражении для потока уходящих частиц, описывающего отражение частиц назад в черную дыру. Поэтому правая часть (8.33) должна быть заменена на Γ_{ω} , в результате чего множитель Γ_{ω} появится в выражении (8.36). Поскольку эта величина зависит от ω , спектр излучения не будет чисто планковским. Но его тем не менее можно считать «тепловым» в следующем смысле. Если поместить черную дыру в термостат, заполненный излучением при температуре (8.27), то обратное рассеяние от черной дыры испытает та же доля $1 - \Gamma_{\omega}$ падающего излучения, что и для

выходящего потока. Поэтому лишь доля Γ_ω падающего излучения моды ω будет поглощаться черной дырой. Следовательно, соотношение между излучением и поглощением в каждой моде не зависит от Γ_ω и совпадает с тем, которое получилось бы при замене черной дыры на черное тело. Таким образом, черная дыра остается в термодинамическом равновесии с термостатом, несмотря на искажение ее спектра.

Полная светимость черной дыры определяется интегралом от величины (8.36) по всем модам

$$L = (1/2\pi) \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \int_0^{\infty} d\omega \omega \Gamma_{\omega l} / (e^{8\pi M \omega} - 1), \quad (8.37)$$

где мы ввели множитель Γ , а также учли зависимость от l .

В случае фермионов благодаря антикоммутируемости в условии нормировки (8.33) перед $|\beta_{\omega\omega'}|^2$ будет стоять знак плюс (см., например, [156, 382]). Поэтому в выражении для спектра появится множитель $e^{8\pi M \omega} + 1$, чего и следовало ожидать для случая статистики Ферми.

Вычисление L для реалистической модели черной дыры требует рассмотрения реальных квантованных полей. Хотя до сих пор мы ограничивались рассмотрением безмассового скалярного поля, общие соображения остаются справедливыми для любых полей. В частности, кванты электромагнитного и нейтринного излучений и линеаризованные гравитоны будут иметь тепловое распределение с температурой (8.27). Основное различие заключается в величине множителей Γ , которая существенно зависит от спина. Детальные вычисления требуют исследования радиального уравнения типа (8.2) и проведения численных расчетов.

Пэйдж [375] (см. также [376, 377]) получил оценку

$$L = (3,4 \cdot 10^{46}) (M/1\text{г})^{-2} \text{ эрг}^{-1} \quad (8.38)$$

для шварцшильдовой черной дыры массы много больше 10^{17}г , причем излучение содержит 81% нейтрино (четырёх типов), 17% фотонов и 2% гравитонов. (Подавление высших спинов связано с увеличением барьера, обусловленного угловым моментом.)

Выражение (8.27) для температуры можно записать в виде

$$T = (1,2 \cdot 10^{26}\text{К}) (1\text{г}/M), \quad (8.39)$$

что для объекта солнечной массы дает $6 \cdot 10^{-8}\text{ К}$. Для такого объекта возможно испускание лишь безмассовых частиц. Но для $M \leq 10^{17}\text{ г}$ температура $T \geq 10^9\text{ К}$ и становится возможным тепловое рождение электрон-позитронных пар. При еще меньших массах могут испускаться и другие типы элементарных

частиц. Детали этого высокотемпературного режима зависят от взаимодействия между частицами. Заметим, что черная дыра массы 10^{15} г имеет радиус около одного ферми, т. е. близкий к радиусу сильного взаимодействия. Но хотя из-за усложнений, связанных с учетом взаимодействия, точно вычислить скорость потери энергии не удается, все же можно говорить о термодинамической природе квантового рождения частиц.

До сих пор мы ограничивались сферически-симметричным случаем. Если допускается вращение, то черная дыра будет описываться аксиально-симметричным семейством решений Керра, для которого метрика характеризуется еще одним параметром Ω , имеющим смысл угловой скорости вращения горизонта событий.

Решение волнового уравнения в метрике Керра сложнее, нежели в шварцшильдовом случае (подробности см., например, в работе [156]). Сферические гармоники Y_{lm} в (8.1) заменяются на аксиально-симметричные сфероидальные гармоники, а потенциал в радиальном уравнении становится более сложным. Но при больших r переход к метрике Керра сводится к замене ω на $\omega - m\Omega$, где m — азимутальное квантовое число для сфероидальных гармоник (играющее роль m для Y_{lm}). Таким образом, для расчета излучения на \mathcal{I}^+ достаточно заменить ω на $\omega - m\Omega$ в выражении для планковского множителя в (8.36) или (8.37):

$$1/\{\exp[2\pi\hbar^{-1}(\omega - m\Omega)] \pm 1\}. \quad (8.40)$$

Следовательно, вращение влияет на тепловой спектр так же, как химический потенциал. Расчеты светимости черной дыры, проведенные Пэйджем [376], показали, что вращение приводит к существенному увеличению вероятности испускания частиц высших спинов.

Поскольку вероятность испускания зависит от азимутального квантового числа m , процесс не является аксиально-симметричным. Множитель (8.40) больше для положительных m , чем для отрицательных, в силу чего более вероятно испускание квантов с угловым моментом, параллельным моменту вращения дыры, чем с противоположно направленным угловым моментом. Это означает, что испускание частиц приводит к систематической потере углового момента вращающейся черной дырой, т. е. замедлению ее вращения.

В случае бозонов (знак минус в (8.40)) при $\omega < m\Omega$ выражение (8.40) становится отрицательным. Более того, даже в пределе $M \rightarrow \infty$ ($T \rightarrow 0$), когда хоккингское тепловое излучение коллапсирующего тела исчезает, величина (8.40) остается конечной и равна -1 для $\omega < m\Omega$ (она стремится к нулю для $\omega \geq m\Omega$ и, следовательно, для всех ω в шварцшильдовом случае,

когда $\Omega = 0$). Отрицательный поток излучения имеет следующий смысл: если низкочастотная классическая волна (с положительными m) падает на вращающуюся черную дыру, отражение приводит к усилению волны, вследствие чего волна отражается с большей энергией — явление, получившее название «сверхизлучения» [362, 400, 499, 500]¹⁾. На квантовом языке это соответствует процессу индуцированного излучения. Поэтому вероятность поглощения этих мод черной дырой становится отрицательной. Сверхизлучение не связано с механизмом Хокинга (обусловленным распространением волн через коллапсирующее тело); оно имеет место и для обычных вращающихся звезд [9]. Квантовый расчет сверхизлучения был выполнен до открытия эффекта Хокинга Старобинским [439] и Унру [467] (см. также [201]).

Представляет интерес также рассмотреть влияние электрического заряда на тепловое излучение черной дыры. Сначала рассмотрим случай электрически нейтрального поля в метрике Рейсснера — Нордстрема, описывающей (невращающуюся) черную дыру с зарядом e . Элемент длины

$$ds^2 = [1 - (2M/r) + (e^2/r^2)] dt^2 - [1 - (2M/r) + (e^2/r^2)]^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (8.41)$$

соответствует горизонту событий при

$$r = r_+ = M + (M^2 - e^2)^{1/2}. \quad (8.42)$$

Воспользовавшись значением (8.42) для R_h в (8.23), найдем поверхностную гравитацию κ для метрики (8.41). Тогда равенство (8.27) приводит к следующему выражению для температуры заряженной черной дыры:

$$T = (1/8\pi k_B M) (1 - 16\pi^2 e^4 / \mathcal{A}^2), \quad (8.43)$$

где $\mathcal{A} = 4\pi r_+^2$ — площадь поверхности горизонта событий.

Из формулы (8.43) следует, что наличие заряда уменьшает температуру черной дыры. В экстремальном случае $e^2 = M^2$ (максимально заряженная дыра) $T = 0$. Из выражений (8.41) и (8.42) следует, что при $e^2 > M^2$ горизонта событий не существует: в точке $r = 0$ находится голая сингулярность. Таким образом, гипотеза «космической цензуры» [369], согласно которой при гравитационном коллапсе не могут образовываться голые сингулярности, приобретает термодинамический смысл требования $T > 0$, которое можно интерпретировать как третий закон термодинамики применительно к черным дырам [101]. Однако более тщательное рассмотрение [133, 191] показывает,

¹⁾ Для массивных полей имеются также «сверхизлучательные» квазисвязанные состояния [601*, 605*, 606*, 614*—616*]. — *Прим. перев.*

что вопрос о возможности в принципе достижения температуры $T = 0$ остается открытым.

Если черная дыра достаточно мала, она оказывается настолько горячей, что рождаются электрон-позитронные пары. Рождение заряженных частиц черной дырой Рейсснера — Нордстрема усложняется наличием электрического поля дыры. Детальное обсуждение этого вопроса дано Гиббонсом [230].

Хорошо известно, что в фоновом электрическом поле могут рождаться пары заряженных частиц даже в отсутствие гравитационного поля. Это следует уже из полуклассической дираковской модели рождения пар. Состояния с положительной и отрицательной энергией свободного дираковского поля разделены промежутком $2m$. Для частиц с зарядом q во внешнем электрическом поле E градиент потенциальной энергии равен qE . Если появляется виртуальная электрон-позитронная пара, то электрическое поле ускоряет частицы пары в противоположных направлениях. Если расстояние между частицами Δx достаточно велико к моменту их предполагаемой аннигиляции, то энергия, приобретаемая частицами за счет электрического поля, становится достаточной, чтобы сделать эти частицы реальными. Это происходит, если $qE\Delta x \approx 2m$. Данный эффект можно также понимать как прохождение (туннелирование) частицы через полосу запрещенных энергий $2m$, в результате чего возникает пара частица — античастица. Это явление получило название парадокса Клейна [331]; оно приводит к противоречию с предположением об устойчивости вакуума.

Если учесть также гравитационное поле черной дыры, то ситуация несколько усложняется, в особенности когда дыра вращается [126, 146, 230]). Возникает тенденция к быстрому электрическому разряду черной дыры вследствие преимущественного испускания заряженных частиц того же знака заряда, что и заряд черной дыры, по сравнению с античастицами противоположного знака. Возникает явление «сверхизлучения заряда» для частиц с энергией $\omega < m\Omega + q\Phi$, где Φ — электростатический потенциал горизонта событий [278]. Таким образом, электрический заряд также дает вклад в «химический потенциал» черной дыры.

Из-за наличия электрического поля, стимулирующего рождение пар частиц, испускание электронов и позитронов может иметь место и для очень массивных черных дыр, имеющих весьма низкую температуру. В таком режиме преобладает рождение пар электрическим полем (парадокс Клейна). Рождение заряженных частиц подавлено лишь при $M \gg 10^5 M_\odot$. В противоположном предельном случае при $M \leq 10^{15}$ г гравитационное (хокинговское) рождение доминирует над рождением частиц электрическим полем.

8.2. Физические аспекты испускания частиц черными дырами

На первый взгляд излучение черной дыры кажется парадоксальным, поскольку ничто, очевидно, не может выходить из области внутри горизонта событий. Но из выражения (8.36) следует, что средняя длина волны испускаемых квантов порядка M , т. е. сравнима с размерами черной дыры. Поскольку локализовать квант в области порядка длины волны невозможно, бессмысленно говорить о том, что частицы возникают в какой-либо выделенной области вблизи горизонта. Представление о частицах, имеющее глобальный характер, оказывается полезным лишь в области вблизи \mathcal{H}^+ . В окрестности черной дыры кривизна пространства-времени сравнима с длиной волны излучения в интересующем нас диапазоне энергий, и представление о локализованных частицах теряет смысл.

Эвристически можно представить себе, что возникающие кванты «туннелируют» из-под горизонта событий [282]. Для объяснения излучения Хокинга можно также использовать представление о непрерывном возникновении виртуальных пар частиц и античастиц в окрестности черной дыры. Частицы виртуальной пары образуются с длиной волны λ на расстоянии порядка λ . При λ порядка размера черной дыры ($\lambda \approx M$) действуют большие приливные силы, препятствующие аннигиляции частиц. Одна из частиц уходит на бесконечность с положительной энергией, что и создает хокинговский поток, а соответствующая античастица попадает в черную дыру на времениподобную траекторию в глубокой потенциальной яме, соответствующую отрицательной энергии по отношению к бесконечности (см., например, [234]). Таким образом, черная дыра излучает кванты с длиной волны порядка M .

Несмотря на неопределенность представления о частицах вблизи горизонта, ясно, что тепловое излучение будет уносить энергию на \mathcal{H}^+ , и возникает вопрос об источнике этой энергии. Она может отбираться только у гравитационного поля, которое вследствие этого должно терять массу. Чтобы выявить это стационарное убывание массы-энергии, необходимо рассмотреть среднее значение тензора энергии-импульса $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$ в окрестности черной дыры. В противоположность частицам, тензор энергии-импульса является локальным объектом, и его можно использовать для выяснения физической стороны процесса и в непосредственной близости к черной дыре и даже внутри ее.

В двумерной модели $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ можно рассчитать явно для конформно-инвариантного поля (разд. 6.3). Рассмотрим статический шар, описываемый статической метрикой общего вида (8.8). Волновое уравнение имеет решения $e^{-i\omega u}$ и $e^{-i\omega v}$ (где u и v за-

даны формулами (8.9)), которые являются положительно-частотными по отношению к глобальному времениподобному вектору Киллинга ∂_t . Вакуумное состояние, построенное по отношению к этим модам, является устойчивым: частицы не рождаются, и система симметрична относительно обращения времени.

Но вследствие поляризации вакуума, вызываемой кривизной пространства-времени, среднее значение тензора энергии-импульса отлично от нуля; оно получается при подстановке $C(r)$ в (6.136):

$$\langle 0 | T_{uu} | 0 \rangle = \langle 0 | T_{vv} | 0 \rangle = -F_u(C) = (1/192\pi) [2CC'' - C'^2], \quad (8.44)$$

$$\langle 0 | T_{uv} | 0 \rangle = (1/96\pi) CC'', \quad (8.45)$$

где функционал F определен выражением

$$F_x(y) = \frac{1}{12\pi} y^{1/2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (y^{-1/2}), \quad (8.46)$$

а штрих обозначает дифференцирование по r .

В качестве примера рассмотрим двумерный аналог пространства-времени Рейсснера — Нордстрема (8.41), для которого $C(r) = (1 - 2Mr^{-1} + e^2 r^{-2})$. С помощью формул (8.44) находим

$$\langle 0 | T_{uu} | 0 \rangle = \langle 0 | T_{vv} | 0 \rangle = \frac{1}{24\pi} \left[-\frac{M}{r^3} + \frac{3}{2} \frac{M^2}{r^4} + \frac{3e^2}{2r^4} - \frac{3Me^2}{r^5} + \frac{e^4}{r^6} \right], \quad (8.47)$$

что соответствует статическому облаку энергии, имеющему особенность при $r = 0$ и отрицательному вне горизонта событий $r = r_+$.

Предположим теперь, что «звезда» претерпевает гравитационный коллапс при начальном радиусе R_0 , как описано на с. 265. Хотя метрика (8.8) правильно описывает геометрию во внешней области, координаты r^* и t (или u и v) уже нельзя использовать для записи простого экспоненциального решения волнового уравнения, так как «уходящие» моды $e^{-i\omega u}$ превращаются в сложные функции (8.28) на \mathcal{I}^- . Вместо этого мы выберем такие координаты, в которых «входящие» моды u , следовательно, вакуумное состояние (обозначаемое через $|\hat{0}\rangle$) имеют стандартную форму Минковского на \mathcal{I}^- (т. е. является обычным вакуумным in-состоянием). Как объяснено в предыдущем разделе, это означает использование вместо u и v координат

$$\hat{u} = \beta [\alpha(u) - 2R_0], \quad \hat{v} = v, \quad (8.48), (8.49)$$

где α и β заданы соотношениями (8.13) и (8.14). В этих координатах метрика (8.8) принимает вид

$$ds^2 = \hat{C}(\hat{u}, \hat{v}) d\hat{u} d\hat{v}, \quad (8.50)$$

$$\hat{C}(\hat{u}, \hat{v}) = C(r) \frac{du}{d\hat{u}} \frac{dv}{d\hat{v}}. \quad (8.51)$$

Вычисляя $du/d\hat{u}$ с помощью (8.17) и (8.18) и $dv/d\hat{v}$ с помощью (8.49) и подставляя в (6.136), найдем [129] (см. также [138, 289—292])

$$\langle \hat{0} | T_{uu} | \hat{0} \rangle = (8.44) + (\alpha')^2 F_U(\beta') + F_u(\alpha'), \quad (8.52)$$

где $\alpha = \alpha(u)$, $\beta = \beta(U - 2R_0)$, а штрих обозначает дифференцирование функций по их аргументам. Выражения для $\langle \hat{0} | T_{vv} | \hat{0} \rangle$ и $\langle \hat{0} | T_{uv} | \hat{0} \rangle$ совпадают с (8.44) и (8.45) соответственно.

Выражение (8.52) описывает область вне коллапсирующего тела. Во внутренней области, где метрика имеет форму (8.11), имеем

$$\langle \hat{0} | T_{UU} | \hat{0} \rangle = F_U(\beta') - F_U(A), \quad (8.53)$$

$$\langle \hat{0} | T_{VV} | \hat{0} \rangle = F_V(\beta') - F_V(A), \quad (8.54)$$

где $\beta = \beta(U - 2R_0)$ и $\beta = \beta(V)$ соответственно.

Общая формула (6.136) применительно к координатам \hat{u} , \hat{v} (8.48) и (8.49) дает $\langle \hat{0} | T_{\mu\nu} | \hat{0} \rangle$. При получении (8.52) — (8.54) мы переходили к координатам v , u или U , V с помощью обычных правил преобразования компонент тензоров. Эти результаты показывают, что вследствие коллапса к статической энергии вакуума (8.44) добавляется выходящий (запаздывающий) поток излучения, постоянный на запаздывающих изотропных лучах u или U (в рассматриваемом случае обратного рассеяния нет). Во внутренней области имеются как падающий, так и уходящий потоки излучения, зависящие сложным образом от внутренней метрики A и траектории коллапса $R(\tau)$. Они описывают частицы, рождающиеся внутри вещества коллапсирующей «звезды» и на ее поверхности. Например, $F_v(\beta')$ в (8.54) соответствует излучению, возникающему на поверхности и распространяющемуся в направлении к $r = 0$, в то время как $F_u(\beta')$ в (8.53) описывает то же излучение, возвращающееся назад после прохождения через центр тела. Тот же поток, выходящий (без изменения) во внешнюю область, описывается членом, пропорциональным $(\alpha')^2$ в (8.52). В дополнение к этому выходящему потоку, возникающему после «отскока», имеется вклад, описываемый последним членом в (8.52), который также можно продолжить назад до поверхности коллапсирующего тела, но который является с самого начала *выходящим*.

Если функцию $\alpha'(u)$ выразить через τ как функцию $\gamma(\tau)$, то с помощью (8.17) можно показать, что при приближении поверхности тела к горизонту событий ($R \rightarrow R_h$, $C \rightarrow 0$, $u \rightarrow \infty$) справедливы следующие предельные соотношения:

$$\gamma \rightarrow 0 \text{ как } e^{-\kappa u}, \quad \dot{\gamma} \rightarrow -(1 - \dot{R})\kappa, \quad \ddot{\gamma} \rightarrow 0$$

(здесь точка обозначает ∂_τ), из которых следует, что средний член в правой части (8.52), измеренный удаленным наблюдателем в координатах u , v , экспоненциально быстро исчезает. Таким образом, этот член представляет собой короткий импульс излучения, который экспоненциально затухает по тому же закону, что и излучение с поверхности коллапсирующего тела.

Последний член в (8.52) можно записать в виде

$$\frac{1}{24\pi} \left[\frac{-\gamma\ddot{\gamma}}{(1 - \dot{R})^2} - \frac{\dot{\gamma}\gamma\ddot{R}}{(1 - \dot{R})^3} + \frac{\frac{1}{2}\dot{\gamma}^2}{(1 - \dot{R})^2} \right] \rightarrow \frac{\kappa^2}{48\pi}, \quad (8.55)$$

что в точности соответствует потоку (в двух измерениях) от теплового излучателя с температурой $T = \kappa/2\pi k_B$ (см. (4.27) для случая $L \rightarrow \infty$), совпадающей с хокинговской температурой (8.27). Следовательно, этот член описывает излучение Хокинга. Заметим, что он не зависит от деталей коллапса и полностью определяется единственным параметром κ — поверхностной гравитацией возникающей черной дыры. Излучение, зависящее от деталей коллапса, целиком описывается экспоненциально затухающим средним членом в (8.52).

Для поздних моментов времени в асимптотической области $r \rightarrow \infty$ вклад поляризации вакуума (8.47) исчезает, и тензор энергии-импульса сводится к

$$\langle \hat{0} | T_{uu} | \hat{0} \rangle = \kappa^2/48\pi, \quad \langle \hat{0} | T_{vv} | \hat{0} \rangle = \langle \hat{0} | T_{uv} | \hat{0} \rangle = 0. \quad (8.56)$$

Явная асимметрия этого выражения относительно обращения времени (имеется лишь запаздывающее излучение) отражает необратимую природу коллапса за горизонт событий.

Хотя различные члены в (8.52) — (8.54) имеют легко выясняемое происхождение, каждому из них в отдельности не следует придавать слишком большое физическое значение. Например, было бы неверным заключение, что поток Хокинга исходит с поверхности коллапсирующего тела. Нужно помнить, что экспериментатор не сможет различить отдельные вклады; могут быть измерены лишь компоненты полного тензора энергии-импульса. Разбиение, проведенное здесь, соответствует выбору специальной координатной системы u , v (или U , V), но эта система сингулярна на горизонте событий.

Чтобы определить, что будет измерять наблюдатель в действительности, нужно задать мировую линию измерительного

прибора. Если вектор мгновенной скорости наблюдателя есть u^μ , то его измерительный прибор будет регистрировать в качестве энергии величину $\langle T_{\mu\nu} \rangle u^\mu u^\nu$, а в качестве потока энергии $\langle T_{\mu\nu} \rangle u^\mu n^\nu$, где $u^\mu n_\mu = 0$. Например, наблюдатель, находящийся в точке с фиксированным r , имеет 2-скорость $C^{-1/2}(1, 0)$ (в координатах t, r^*) и будет измерять плотность энергии $C^{-1} \langle \hat{0} | T_{tt} | \hat{0} \rangle$, где T_{tt} определяется с помощью (4.17). Эта величина обращается в бесконечность на горизонте, где $C = 0$, что отражает тот факт, что мировая линия наблюдателя, находящегося при фиксированном r , по мере приближения к горизонту событий все больше отклоняется от мировой линии свободно падающего наблюдателя.

Более реалистическим является рассмотрение свободно падающего наблюдателя. В случае метрики Шварцшильда наиболее подходящими будут координаты Крускала (которые не-сингулярны на горизонте — см. разд. 3.1). Используя преобразования (3.19) и конформный множитель $\bar{C} = 2Mr^{-1}e^{-r/2M}$ из (3.20), найдем, что наблюдатель, движущийся вдоль мировой линии постоянного \bar{r} с 2-скоростью $\bar{C}^{-1/2}(1, 0)$ (в координатах \bar{t}, \bar{r}); $\bar{t} = 1/2(\bar{v} + \bar{u})$, $\bar{r} = 1/2(\bar{v} - \bar{u})$) измеряет плотность энергии

$$\bar{C}^{-1} \langle \hat{0} | T_{tt} | \hat{0} \rangle = \langle \hat{0} | T_{\bar{u}\bar{v}} + T_{\bar{v}\bar{u}} + 2T_{\bar{u}\bar{u}} | \hat{0} \rangle, \quad (8.57)$$

где

$$\langle \hat{0} | T_{\bar{u}\bar{v}} | \hat{0} \rangle = \frac{(24\pi)^{-1}(\bar{v})^2 e^{-r/2M}}{8Mr} \left(1 + \frac{4M}{r} + \frac{12M^2}{r^2} \right), \quad (8.58)$$

$$\langle \hat{0} | T_{\bar{v}\bar{u}} | \hat{0} \rangle = - \frac{(24\pi)^{-1} e^{r/2M}}{\bar{v}^2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{3M}{2r^3} \right), \quad (8.59)$$

$$\langle \hat{0} | T_{\bar{u}\bar{u}} | \hat{0} \rangle = - \frac{R}{48\pi} = - \frac{M}{12\pi r^3}. \quad (8.60)$$

Ясно, что выражение (8.57) конечно (при $\bar{u} \rightarrow \infty$), поскольку \bar{v} остается конечным на горизонте будущего. Таким образом, мы приходим к заключению, что наблюдатель, пересекающий горизонт событий вдоль мировой линии с постоянным значением крускаловской пространственной координаты, измеряет конечную плотность энергии.

Этот анализ позволяет разрешить кажущийся парадокс, касающийся эффекта Хокинга. Собственное время, требуемое свободно падающему наблюдателю для достижения горизонта событий из точки, находящейся на конечном расстоянии от дыры, конечно, но время этого свободного падения, измеренное по часам бесконечно удаленного наблюдателя (в координатах u, v), бесконечно. Если пренебречь реакцией излучения, черная дыра успевает излучить бесконечную энергию за то время, пока свободно падающий наблюдатель с точки зрения системы отсчета

на бесконечности достигнет горизонта событий. Поэтому может показаться, что в падающей системе отсчета наблюдатель за конечное время встретит бесконечный полный поток излучения, который должен привести к его гибели. С другой стороны, горизонт событий представляет собой глобальную конструкцию, не имеющую локального смысла [276]; поэтому абсурдно думать, что он может действовать как физический барьер для свободно падающего наблюдателя.

Парадокс разрешается, если тщательно учитывать различие между числом частиц и плотностью энергии. Когда наблюдатель приближается к горизонту, представление об определенном числе частиц теряет смысл для интересующих нас длин волн хокинговского излучения (см. с. 276); наблюдатель оказывается «внутри» частиц. Следовательно, мы не должны беспокоиться о том, что наблюдатель столкнется с бесконечным числом частиц. С другой стороны, энергия имеет локальный смысл. В этом случае, хотя поток Хокинга и расходится при приближении к горизонту, но то же самое происходит с вкладом статической поляризации вакуума, причем последняя *отрицательна*. Падающий наблюдатель не сможет отличить поток энергии, связанный с уходящим излучением Хокинга, от потока энергии, обусловленного тем, что он пересекает «облако» поляризованного вакуума. Результирующий эффект состоит в сокращении бесконечных членов на горизонте событий и появлении конечных величин, таких, как (8.57) — (8.60). (Точные значения зависят от траектории падения.)

Проведенный анализ позволяет разрешить также загадку о том, как черная дыра может терять массу, хотя вещество не пересекает горизонта событий из внутренней области наружу. Можно показать, что на горизонте событий $\langle \hat{0} | T_{vv} | \hat{0} \rangle$ оказывается равным величине

$$-(1/192\pi)(\partial C/\partial r)^2|_{r=R_h} = -\kappa^2/48\pi,$$

которая всегда отрицательна и равна потоку Хокинга на бесконечности со знаком минус. Это с необходимостью должно быть так, поскольку при построении величины $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ было заложено условие ковариантного сохранения. Поскольку $\langle T_{vv} \rangle$ представляет собой изотропный поток, пересекающий горизонт событий, легко видеть, что постоянная потеря энергии-массы за счет потока Хокинга уравнивается таким же потоком отрицательной энергии, падающим на черную дыру снаружи. Таким образом, черная дыра теряет массу не путем испускания квантов, а вследствие поглощения отрицательной энергии. Идея потока отрицательной энергии уже встречалась нам в связи с задачей о движущихся зеркалах в разд. 7.1.

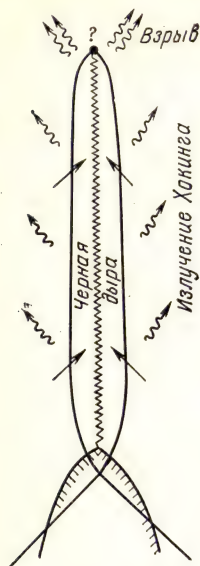


Рис. 26. Испарение черной дыры. Нижняя часть рисунка соответствует рис. 24. Поток отрицательной энергии через горизонт событий в черную дыру (прямые стрелки) постепенно приводит к сокращению площади поверхности горизонта. Скорость этого процесса нарастает до тех пор, пока не происходит быстрое сжатие горизонта до сингулярности, сопровождаемое взрывным испусканием квантов.

В приведенных рассуждениях предполагалось, что квантовое состояние представляет собой обычный вакуум в in-области. Можно задать вопрос: в какой степени изменит эффект Хокинга присутствие квантов в начальном состоянии [481]? Из формулы (2.44) (которая справедлива и в искривленном пространстве-времени) можно найти вклад в $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ в out-области, обусловленный наличием n квантов моды σ в начальном состоянии. В случае бозонов вследствие индуцированного излучения в out-области появится дополнительный поток энергии [30]. Форма уходящих мод в out-области дается вторым членом в (8.26), откуда легко видеть, что последний член в (2.44) экспоненциально затухает по u со временем убывания в e раз $(2\kappa)^{-1}$, т. е. характерным временем коллапса. Таким образом, влияние первоначально присутствующих квантов экспоненциально затухает за то же время, что и поверхностная светимость, и черная дыра быстро приходит в состояние теплового равновесия, «забывая» детали начального состояния. Поэтому мы приходим к заключению, что эффект Хокинга является чрезвычайно общим и не зависит от выбора физически разумного начального квантового состояния.

Эти общие черты, характеризующие излучение черной дыры, сохраняются и в полной четырехмерной трактовке.

Потеря массы черной дырой порождает проблему обратной реакции излучения на структуру самой черной дыры. Предполагая, что фоновую метрику по-прежнему можно рассматривать как классическую, приходим к заключению, что поток отрицательной энергии будет вызывать уменьшение площади поверхности горизонта событий. Это показано схематически на рис. 26 для шварцшильдовой дыры. По мере уменьшения поверхности горизонта и массы черной дыры ее температура (8.39) и светимость (8.38) возрастают. Следова-

тельно, шварцшильдовы черные дыры имеют отрицательную теплоемкость: они излучают и при этом нагреваются — поведение, типичное для самогравитирующих систем [348].

Имея выражение для $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ на горизонте событий, можно по-

пытаться исследовать обратную реакцию более детально путем интегрирования уравнений Эйнштейна. Таким путем можно описать эволюцию горизонта событий. В частности, в адиабатическом приближении, когда схлопывание черной дыры не учитывается при расчете $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, можно ожидать, что горизонт будет сокращаться в соответствии с потерей массы черной дырой. К сожалению, уравнение эволюции горизонта нелинейно, и оно не было решено. Но если пренебречь некоторыми членами высшего порядка, то скорость схлопывания действительно соответствует тому, чего можно ожидать, исходя из примитивных представлений [88]. Тем не менее пока неясно, является ли влияние членов высшего порядка пренебрежимо малым и действительно ли форма схлопывающегося горизонта на рис. 26 правильна [266, 459] ¹⁾.

По мере того как дыра становится горячее, она начинает испускать элементарные частицы большей массы. При температуре выше 10^{10} К испускаются электроны и позитроны, и любой остаточный заряд черной дыры быстро исчезнет. Более того, эффекты сверхизлучения приводят к потере черной дырой углового момента, и она медленно приближается к шварцшильдовой.

Продолжение процесса Хокинга приводит к тому, что дыра испаряется все быстрее. Ее конечная судьба не может быть предсказана в рамках существующей теории: когда

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} \approx k_B T \approx M^{-1}, \quad (8.61)$$

дыра схлопывается со скоростью, сравнимой с частотой излучения. В этой ситуации уже нельзя говорить о термодинамическом равновесии, нельзя считать хорошим приближением представление о фиксированном фоновом пространстве-времени. Условие (8.61) достигается, когда

$$\frac{dM}{dt} \sim (k_B T)^4 \mathcal{A} \sim 1, \quad \text{или} \quad M^{-4} \times M^2 \sim 1,$$

т. е. когда $M \sim 1$ (масса Планка $\sim 10^{-5}$ г), где мы использовали закон излучения Стефана и выражение для площади поверхности \mathcal{A} шварцшильдовой черной дыры $16\pi M^2$. На этой стадии черная дыра имеет планковские размеры (10^{-33} см), и квантово-гравитационные эффекты высшего порядка, несомненно, становятся существенными.

Были высказаны предположения, что конечной стадией испарения черной дыры является ее взрывное исчезновение [281], образование голой сингулярности [156, 397] или, возможно,

¹⁾ В работе [459] допущена ошибка, исправленная в [597*]. — *Прим. перев.*

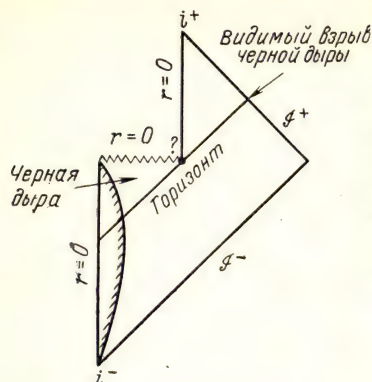


Рис. 27. Диаграмма Пенроуза испаряющейся черной дыры. Нижняя часть диаграммы соответствует рис. 25. Однако при учете обратной реакции черная дыра испаряется и горизонт пересекает \mathcal{I}^+ в конечный момент времени после прохождения через голую сингулярность (отмеченную вопросительным знаком). Область, лежащая выше, предположительно является пространством Минковского.

объекта планковской массы. На рис. 27 показана возможная диаграмма Пенроуза для этих ситуаций, где точка представляет одну из упомянутых выше трех возможностей. Следует заметить, однако, что, согласно Герлаху [229], горизонт вообще не будет образовываться. Каков бы ни был конечный исход, детальное поведение дыры на конечных стадиях испарения зависит от природы элементарных частиц при высоких энергиях. Например, если число истинно элементарных частиц невелико, скорость излучения не будет возрастать столь быстро, как в случае, когда число сортов частиц быстро растет при больших массах, как предполагает Хагедорн [263]. Это может привести и к наблюдаемым следствиям [50, 403]. Таким образом, исследование испарения черных дыр дает уникальную возможность проникновения в физику частиц сверхвысоких энергий.

В течение последней десятой доли секунды своего существования черная дыра высвобождает энергию 10^{30} эрг, что эквивалентно взрыву 10^6 мегатонных термоядерных бомб, причем значительная доля ее испускается в виде γ -квантов. С помощью существующих γ -телескопов такие вспышки не были зарегистрированы, хотя величина потока, необходимого для их обнаружения с помощью существующего оборудования, намного превышает величину, которой можно ожидать, исходя из других соображений [51]. Более обещающим является поиск радиовспышек, вызываемых взрывным вырыванием плазмы из черной дыры в межзвездное магнитное поле [403]. Тот факт, что такие вспышки не были обнаружены с помощью существующих установок, дает верхнюю оценку числа взрывов черных дыр порядка 10^{-5} пс $^{-3}$ в год [357].

Предполагая, что гравитационные поправки высших порядков несущественны, время жизни испаряющейся черной дыры можно вычислить исходя из ее светимости (8.38). В результате получим оценку $10^{-26} (M/1 \text{ г})^3$ с; следовательно, для черной дыры

размера порядка 1 ферми (10^{-13} см) с массой около 10^{15} г время жизни сравнимо с возрастом вселенной. Маловероятно, чтобы такие черные минидыры могли образовываться когда-либо, кроме начальной стадии существования вселенной; это означает, что к настоящему времени черные дыры с массой меньше 10^{15} г должны уже исчезнуть в результате испарения.

Несмотря на то что квантовые черные дыры рожают элементарные частицы и античастицы парами, некоторые из законов сохранения оказываются нарушенными. Например, черная дыра, возникающая в результате коллапса звезды, поглощает в основном барионы, а испускает преимущественно нейтрино и фотоны, поскольку в течение большей части времени ее существования температура слишком мала для испускания массивных частиц. Таким образом, теряет обычный смысл закон сохранения барионного числа. (Следует напомнить, что, несмотря на испарение черной дыры, остается еще сингулярность, через которую барионы могут покидать наше пространство-время.)

Тот факт, что существование квантовых черных дыр приводит к прекращению действия некоторых законов физики элементарных частиц, означает возможность осуществления в ее присутствии процессов, которые иначе были бы запрещены. Можно даже предположить, что некоторые реакции могут идти через образование виртуальных черных дыр в качестве промежуточных состояний. Например, Хокинг [286] обсуждал процесс

$$\mu^{\pm} \rightarrow \text{черная дыра} \rightarrow e^{\pm} + \gamma$$

(реакция $\mu \rightarrow e + \gamma$ запрещена законом сохранения лептонного квантового числа мюона).

Несомненно, наиболее убедительным аргументом, говорящим о том, что к хокинговскому излучению следует относиться серьезно, является глубокая связь, которую устанавливает этот эффект между физикой черных дыр и термодинамикой. Еще до появления работы Хокинга было замечено, что в теории черных дыр имеются четыре закона, аналогичные четырем началам термодинамики [22]. Существование параметра поверхностной гравитации κ , постоянного на горизонте событий, напоминает «нулевой закон» термодинамики, требующий постоянства температуры для системы, находящейся в тепловом равновесии. Сохранение энергии при столкновениях черных дыр и в процессах типа процесса Пенроуза (с. 274) и сверхизлучения, в которых происходит извлечение энергии из черной дыры, либо передача энергии дыре, эквивалентно первому началу термодинамики. Более того, уже упоминалось (с. 274), что существует аналог и третьего закона, запрещающий приближение к случаю экстремальной черной дыры Керра — Ньюмена,

Второе начало термодинамики, требующее необратимого увеличения энтропии, находит естественную аналогию в теореме Хокинга [275], согласно которой поверхность горизонта событий \mathcal{A} не может убывать

$$d\mathcal{A} \geq 0 \quad (8.62)$$

во всех процессах с черными дырами при выполнении слабого энергетического условия Хокинга — Пенроуза [288]. Это сильный аргумент в пользу отождествления \mathcal{A} с энтропией \mathcal{S} .

Существование энтропии черной дыры следует также из известного соотношения между энтропией и информацией [433] (см. также обзор [489]). Если звезда сжимается и образует черную дыру, вся информация о микроскопических состояниях звезды оказывается скрытой за горизонтом событий. Считая для грубой оценки, что на одну элементарную частицу приходится один бит информации, получаем полную потерю информации в черной дыре порядка M/m , где M — масса дыры, m — масса характерной элементарной частицы, из которых было построено коллапсирующее тело. Соответствующая энтропия $\mathcal{S} \sim Mk_B/m$. Может показаться, что в принципе не существует нижнего предела для m , поэтому величина \mathcal{S} должна быть неограниченной. (Это согласуется с тем фактом, что классическая черная дыра, будучи абсолютно черной, имеет нулевую температуру.) Однако, как было впервые отмечено Бекенштейном [27, 28], существует нижняя граница для m , обусловленная тем, что комптоновская длина волны составляющих частиц не должна превышать радиуса черной дыры, т. е. быть $\leq M$, чтобы такая частица могла «уместиться» в дыре. Следовательно, максимальная потеря информации $\sim M^2/\hbar$, так что $\mathcal{S} \sim M^2 k_B/\hbar = M^2 k_B \sim k_B \mathcal{A}$ в используемой системе единиц. Очевидно, \mathcal{S} становится бесконечной в классическом пределе ($\hbar \rightarrow 0$).

Работа Хокинга поставила догадку Бекенштейна на прочный теоретический фундамент, причем точное соотношение имеет вид (см., например, [156])

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4} k_B \mathcal{A}. \quad (8.63)$$

Таким образом, закон возрастания поверхности горизонта событий (8.62) оказывается лишь частным случаем второго начала термодинамики $d\mathcal{S} \geq 0$.

При испарении черной дыры, когда поверхность горизонта событий сокращается, условие (8.62) нарушается. Это становится возможным вследствие нарушения лежащего в основании теоремы слабого энергетического условия из-за отрицательной энергии вакуума. Однако при этом не происходит нарушения второго начала термодинамики, поскольку энтропия окружающей среды возрастает вследствие испускания теплового излу-

чения. Полная энтропия по-прежнему возрастает. Оказывается невозможным и искусственное нарушение второго начала путем впрыскивания в черную дыру отрицательной энергии (например, от движущихся зеркал, см. разд. 7.1) [203].

Можно развить полную термодинамическую теорию черных дыр [132, 133, 279, 307], включая фазовые переходы, циклы Карно, анализ устойчивости и даже обобщения на случай неравновесных ситуаций [96, 429] (см. также [505]). Но некоторые проблемы остаются нерешенными, например каково соотношение между потерей информации при коллапсе звезды и внутренними микросостояниями вечной черной дыры, такой, как черная дыра, описываемая решением Крускала (см. следующий раздел), которое является всюду *вакуумным* решением уравнений Эйнштейна [29]. Можно ли распространить понятие энтропии черной дыры на произвольные гравитационные поля [127, 134, 378]? Будет ли хокинговское излучение всегда точно тепловым даже при наличии взаимодействий (разд. 9.3) и при учете реакции самой дыры [378]? Означает ли процесс Хокинга нарушение симметрии относительно обращения времени в квантовой гравитации [487]? Многие из этих вопросов еще находятся в стадии исследования (см. также [617* — 625*]).

8.3. Вечные черные дыры

В предыдущих разделах рассматривалось поведение квантованного поля в фоновом пространстве-времени коллапсирующего тела. Но, как оказалось, основные закономерности эффекта Хокинга не зависят от деталей коллапса, что наводит на мысль, что этот эффект в большей степени связан с причинной и топологической структурой пространства-времени, чем с его конкретной геометрией. Оказывается, что это действительно так. Поэтому можно попытаться полностью забыть о коллапсирующем теле и построить квантовую теорию поля в максимально расширенном многообразии, которое всюду является решением вакуумных уравнений Эйнштейна (разд. 3.1).

Начнем с обсуждения двумерной модели шварцшильдовой черной дыры, полагая $C = (1 - 2Mr^{-1})$ в (8.8). Результаты легко обобщить на случай черной дыры Рейсснера — Нордстрема [133]. Диаграмма Пенроуза для этого многообразия показана на рис. 6. В координатах Крускала \bar{u} , \bar{v} , введенных в (3.19), элемент длины имеет вид

$$ds^2 = 2Mr^{-1}e^{-r/2M} d\bar{u} d\bar{v}; \quad (8.64)$$

он регулярен всюду, кроме точки $r = 0$, где имеется физическая особенность. Отметим, что хотя метрика пространства-времени симметрична относительно обращения времени, выбираемое

квантовое состояние не обязательно должно обладать этим свойством.

Существуют два естественных набора мод для безмассового скалярного поля, которые пропорциональны либо $e^{-i\omega u}$, $e^{-i\omega v}$ в изотропных шварцшильдовых координатах u и v , либо $e^{-i\omega \bar{u}}$, $e^{-i\omega \bar{v}}$ в изотропных координатах Крускала (3.19). Первый набор имеет бесконечно быстрые осцилляции на горизонте событий, второй набор является регулярным во всем многообразии. Этим наборам соответствуют вакуумные состояния, которые мы будем обозначать $|0_S\rangle$ и $|0_K\rangle$ соответственно. Скалярные функции Грина в каждом случае определяются в терминах функций Грина пространства Минковского (4.23) при $L \rightarrow \infty$ с помощью соотношения вида (3.154) при $n=2$. Опуская, как обычно, бесконечную постоянную (инфракрасная расходимость), получаем

$$D_S^{(1)}(x'', x') = -(1/2\pi) \ln \Delta u \Delta v, \quad (8.65)$$

$$D_K^{(1)}(x'', x') = -(1/2\pi) \ln \Delta \bar{u} \Delta \bar{v}. \quad (8.66)$$

Преобразовав $D_K^{(1)}$ к шварцшильдовым координатам, будем иметь

$$D_K^{(1)}(x'', x') = -(1/2\pi) \ln [\operatorname{ch} \kappa(t'' - t') - \operatorname{ch} \kappa(r'' - r')] + \\ + \text{функция от } (r'', r'), \quad (8.67)$$

что явно инвариантно относительно преобразования $t'' \rightarrow t'' + 2\pi i n / \kappa$ (n — целое число), где $\kappa = (4M)^{-1}$ — поверхностная гравитация. Это означает, что $D_K^{(1)}$ периодична по мнимому шварцшильдову времени с периодом $2\pi/\kappa$. Как объяснено в разд. 2.7 (см. (2.104)), эта особенность характерна для тепловых функций Грина. В данном случае температура равна $\kappa/2\pi k_B$, что совпадает с температурой Хокинга (8.27). Аналогичное условие периодичности имеет место и в четырехмерном случае, даже если дыра вращается [270]. Например, для мод с азимутальным квантовым числом m

$$D_K^{(1)}(t'' - t' + 2\pi i n / \kappa; r'', r') = e^{2\pi m \Omega / \kappa} D_K^{(1)}(t'' - t'; r'', r'), \quad (8.68)$$

что подтверждает аналогию между $m\Omega$ и химическим потенциалом (см. замечание после формулы (2.104)). Эти представления также обобщаются на случай электрически заряженных черных дыр и испускаемых частиц [239, 240].

Вдали от дыры функция Грина (8.65) сводится к обычной функции $D^{(1)}$ для плоского пространства-времени; в этой области $|0_S\rangle$ — обычное вакуумное состояние. Очевидно, наблюдатель, находящийся в этой области, будет рассматривать $|0_K\rangle$ как термодинамическое состояние с температурой $\kappa/2\pi k_B$, а

$D_K^{(1)}$ — как тепловую функцию Грина для черной дыры, погруженной в термостат с тепловым излучением при хокинговской температуре. Действительно, как показывает подробный анализ [41], вдали от дыры $D_K^{(1)}$ можно записать в виде бесконечной суммы (2.111) функций Грина $D_S^{(1)}$, что подтверждает тепловой характер этой функции. Выражение (8.67), очевидно, инвариантно относительно обращения времени, поэтому помимо хокинговского потока излучения, уходящего на \mathcal{I}^+ , имеется такой же по величине поток, падающий на дыру из \mathcal{I}^- . Этот вывод подтверждается вычислением $\langle 0_K | T_{\mu\nu} | 0_K \rangle$ стандартным способом с использованием $D_K^{(1)}$, в результате которого плотность энергии на \mathcal{I}^\pm оказывается равной $\kappa^2/24\pi$. Таким образом, вакуум $|0_K\rangle$ описывает состояние установившегося термодинамического равновесия между черной дырой и окружающей средой, такое, которое получалось бы, если бы черная дыра была погружена в полость с идеально отражающими стенками. (Если полость слишком велика, равновесие будет неустойчивым; см., например, [133].) Состояние $|0_K\rangle$ известно как вакуум Хартля — Хокинга [270] или вакуум Израэля [316].

Сравнение (3.19) с (4.69) и (4.70) при $a = \kappa = (4M)^{-1}$ показывает, что состояние $|0_S\rangle$ аналогично состоянию $|0_R\rangle$, связанному с ускоренно движущейся системой отсчета в области риндлеровского клина в пространстве Минковского. Подобным же образом $|0_K\rangle$ соответствует $|0_M\rangle$. Это неудивительно, поскольку структуры горизонтов риндлеровского клина и шварцшильдовой черной дыры совпадают. Сравнение рис. 6 и 14 показывает, что область R пространства Минковского находится в том же причинном отношении к области L , что и область I (представляющая вселенную, внешнюю по отношению к черной дыре) к области II («зеркальной» вселенной). Точно так же, как в разд. 4.5, моды, заданные на расширенном многообразии, можно связать с модами, определенными лишь в областях I и II по отдельности [468]. Поскольку математическая связь между координатами u, v и \bar{u}, \bar{v} в обоих примерах одинакова, нет необходимости повторять здесь выкладки, и можно сразу выписать боголюбовские преобразования, связывающие оба набора мод. Формально они совпадают с (4.95) и (4.96), где теперь $b_k^{(2)}$ — оператор уничтожения для мод в шварцшильдовой области I (уничтожение частиц в «нашей» вселенной вне черной дыры), а $b_k^{(1)}$ — оператор уничтожения в области II . Операторы d_k аналогично связаны с крускаловскими модами.

Как было показано в разд. 4.5, преобразование Боголюбова приводит к тепловому спектру (4.97) с температурой $a/2\pi\kappa_B = \kappa/2\pi\kappa_B$, чего и следовало ожидать. Но это преобразование на самом деле содержит больше информации. Полагая $\phi_\omega = e^{-\pi\omega/a}$,

из (4.95) и (4.96) получаем

$$b_k^{(1)} = e^{iJ} d_k^{(1)} e^{-iJ}, \quad (8.69)$$

где $\omega = |k|$,

$$J = \sum_k i\phi_\omega (b_{-k}^{(1)\dagger} b_k^{(2)\dagger} - b_{-k}^{(1)} b_k^{(2)}) \quad (8.70)$$

и использованы коммутационные соотношения.

Из определений вакуумных состояний

$$b_k^{(1)} |0_S\rangle = b_k^{(2)} |0_S\rangle = 0, \quad (8.71)$$

$$d_k^{(1)} |0_K\rangle = d_k^{(2)} |0_K\rangle = 0 \quad (8.72)$$

и равенства $e^{-iJ} b_k^{(1)} |0_S\rangle = d_k^{(1)} e^{-iJ} |0_S\rangle$, следующего из (8.69), имеем

$$|0_K\rangle = e^{-iJ} |0_S\rangle. \quad (8.73)$$

После разложения экспоненты и перегруппировки слагаемых находим

$$\begin{aligned} |0_K\rangle &= \exp \left\{ \sum_k [-\ln \operatorname{ch} \phi_\omega + \operatorname{th} \phi_\omega b_k^{(1)\dagger} b_k^{(2)\dagger}] \right\} |0_S\rangle = \\ &= \prod_k (\operatorname{ch} \phi_\omega)^{-1} \sum_{n_k=0}^{\infty} e^{-n_k \pi \omega / \kappa} |n_k^{(1)}\rangle |n_k^{(2)}\rangle \end{aligned} \quad (8.74)$$

в терминах состояний, содержащих $n_k^{(2)}$ квантов области I и $n_k^{(1)}$ квантов в области II [316, 468].

Если наблюдатель ограничен областью I (вне черной дыры) и не имеет доступа в область II, он не сможет измерить $|n_k^{(1)}\rangle$. Если такой наблюдатель измеряет некоторую величину A , описываемую оператором \hat{A} в квантовом состоянии $|0_K\rangle$, то часть (8.74), связанная с $|n_k^{(1)}\rangle$, выделяется в виде отдельного множителя:

$$\begin{aligned} \langle 0_K | \hat{A} | 0_K \rangle &= \sum_{n_k} \prod_k \langle n_k^{(2)} | \hat{A} | n_k^{(2)} \rangle \exp(-2n_k \pi \omega / \kappa) \times \\ &\times [1 - \exp(-2\pi \omega / \kappa)] = \operatorname{tr}(\hat{A} \rho); \end{aligned} \quad (8.75)$$

здесь ρ можно записать в виде

$$\sum_n \prod_k \left\{ \frac{e^{-\beta E_n}}{\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\beta E_m}} \right\} |n_k\rangle \langle n_k|, \quad (8.76)$$

где $E_n = n\omega$, $\beta = 2\pi/\kappa$, и рассматривать как матрицу плотности, соответствующую *термодинамическому* усреднению (разд. 2.7) при температуре $\kappa/2\pi k_B$. В частности, если \hat{A} — оператор числа квантов моды σ , то получим

$$\langle 0_K | N_\sigma | 0_K \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n \sigma e^{-\beta E_n} / \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\beta E_m} = 1/(e^{\beta\omega} - 1), \quad (8.77)$$

т. е. планковский спектр.

Тот факт, что чистое состояние $|0_K\rangle$, заданное на полном многообразии, представляется наблюдателю, ограниченному областью I, как смешанное состояние с матрицей плотности (8.76), не вызывает удивления. Наличие горизонта событий приводит к тому, что информация о модах в области II теряется, и эта потеря информации естественно сопровождается появлением ненулевой энтропии в области I (энтропия чистого состояния равна нулю). В самом деле, соотношение (8.76) не только приводит к тепловому спектру, но и определяет полностью тепловое излучение, т. е. полное отсутствие корреляции между испущенными квантами [280, 385, 480]. Например, вероятность того, что $|0_K\rangle$ содержит ${}^1n_{k_1}$ квантов моды k_1 , ${}^2n_{k_2}$ квантов моды k_2 и т. д. в области I, равна

$$\begin{aligned} \langle {}^1n_{k_1}, {}^2n_{k_2}, \dots, |0_K\rangle|^2 &= \prod_j \exp\left(-\frac{2\pi {}^j n_{k_j} |k_j|}{\kappa}\right) \times \\ &\times \left[1 - \exp\left(-\frac{2\pi |k_j|}{\kappa}\right)\right] = \prod_j P({}^j n_{k_j}), \end{aligned} \quad (8.78)$$

где $P({}^j n_{k_j})$ — вероятность того, что мода k_j содержит ${}^j n_{k_j}$ частиц. Тот факт, что все $P({}^j n_{k_j})$ входят в это выражение в виде произведения, показывает полную статистическую независимость этих вероятностей.

Соображения, касающиеся матрицы плотности и тепловых состояний, непосредственно обобщаются на случай четырех измерений и применимы также к однородно ускоренным системам отсчета. Делались также попытки [143, 144, 236, 337, 342, 343] распространить их на случай горизонтов, не связанных с черными дырами, таких, как в пространстве де Ситтера, хотя в этом случае физический смысл тепловой структуры менее ясен.

При получении этих результатов обратной реакцией рождения частиц на фоновое пространство-время пренебрегалось. Отдача при испускании черной дырой квантов с необходимостью должна приводить к корреляциям между испущенными квантами, если излучается лишь небольшая часть полной энергии

[378]. Это, конечно, относится к любому нагретому телу и является следствием того, что дыра не находится в термодинамическом равновесии с окружающей средой.

Хотя приведенные рассуждения основаны на использовании максимально расширенного многообразия Крускала, тепловая природа излучения и отсутствие корреляций имеют место и в более реалистической модели коллапса. В случае безмассового поля \mathcal{I}^- является поверхностью Коши для пространства-времени коллапсирующего тела, но \mathcal{I}^+ не является поверхностью Коши; необходимо также учесть распространение поля за горизонт событий будущего H^+ . Объединение \mathcal{I}^+ и H^+ является поверхностью Коши (рис. 25). Следовательно, для получения полного набора мод в out-области необходимо к стандартным экспоненциальным модам на \mathcal{I}^+ добавить моды, связанные с H^+ . Явное построение такого полного набора было выполнено Уолдом [480]. Но результаты измерений, выполняемых на \mathcal{I}^+ , не зависят от деталей, связанных с модами на горизонте. Если ограничиться измерениями на \mathcal{I}^+ и отказаться от информации о модах на горизонте, то мы снова получим матрицу плотности вида (8.76). Моды на горизонте можно представлять себе как описывающие кванты, падающие в черную дыру. Таким образом, мы приходим к модели процесса Хокинга, упомянутой на с. 276: пары частиц рождаются вблизи горизонта, одна из частиц движется к \mathcal{I}^+ (в пренебрежении обратным рассеянием), а вторая попадает в черную дыру. Отказываясь от информации о частицах, падающих в черную дыру, приходим к необходимости описывать частицы на бесконечности с помощью смешанного состояния (т. е. использовать матрицу плотности). Таким образом, независимо от того, исследуется ли эффект Хокинга в полном многообразии Крускала или в поле коллапсирующего тела, результаты измерений на \mathcal{I}^+ будут иметь тепловой характер.

До сих пор мы обсуждали свойства двух «вакуумных» состояний $|0_K\rangle$ и $|0_S\rangle$, первое из которых соответствует термостату с тепловым излучением, а второе сводится к обычному вакуумному состоянию Минковского на больших расстояниях от дыры. Как всегда в квантовой теории, необходимо привлечь дополнительные физические соображения, чтобы установить, какое квантовое состояние соответствует интересующей нас ситуации. Когда во вселенной имеется вечная черная дыра, только наблюдения могут выявить, какое квантовое состояние действительно реализуется. Но состояние $|0_K\rangle$ явно воспроизводит физическую картину, которая возникает, если черную дыру, образовавшуюся в результате коллапса, поместить в ящик с отражающими стенками и дожидаться установления теплового равновесия.

На максимально расширенном многообразии можно построить еще одно «вакуумное» состояние, которое будет воспроизводить излучение коллапсирующего тела, т. е. несимметричный во времени тепловой поток от дыры, а не излучение в термостате. Это состояние было открыто Унру [468].

Заметим, что состояние $|0_S\rangle$ связано с модами, которые являются положительно-частотными по отношению к вектору Киллинга ∂_t (см. (4.77)), в то время как состояние $|0_K\rangle$ определено для положительно-частотных мод относительно вектора $\partial_{\bar{t}}$, где \bar{t} — время Крускала ($\bar{t} = 1/2(\bar{u} + \bar{v})$) (см. (4.82)). Как видно из рис. 6, изотропные линии $u = \text{const}$, соответствующие поверхностям постоянной фазы стандартных экспоненциальных мод ($e^{-i\omega u}$) пространства Минковского на \mathcal{I}^+ , будучи продолженными назад во времени, в отсутствие коллапсирующего тела пересекают горизонт *прошлого* H^- расширенного многообразия Крускала. В картине коллапса (рис. 25) изотропный луч γ (последний луч, проходящий через коллапсирующее тело, который при выходе из него остается лежащим на горизонте будущего H^+) выполняет роль, аналогичную H^- на рис. 6. Лучи, входящие немного раньше γ , отражаются от начала координат и пересекают γ на пути к \mathcal{I}^+ вблизи H^+ . Эти лучи соответствуют волнам, которые являются положительно-частотными по отношению к аффинному параметру вдоль γ [278] (см. также [235, 387]). Для лучей, очень близких к H^+ , этот аффинный параметр с хорошей точностью совпадает с аффинным параметром \bar{u} на горизонте прошлого расширенного многообразия (рис. 6). Следовательно, геометрические эффекты при коллапсе можно имитировать, выбирая *in*-моды, имеющие форму $e^{-i\omega\bar{u}}$ на H^- и $e^{-i\omega v}$ на \mathcal{I}^- . Моды $e^{-i\omega\bar{u}}$ являются положительно-частотными по отношению к вектору $\partial_{\bar{u}}$, который является вектором Киллинга на H^- [468]. Далее можно забыть о коллапсирующем теле и работать только с расширенным многообразием Крускала. Вакуумное состояние, ассоциируемое с таким выбором мод в прошлом, получило название вакуума Унру; мы будем обозначать его $|0_U\rangle$. Оно соответствует тепловому потоку частиц, выходящих из области, где находится черная дыра. Обращенное во времени состояние, соответствующее модам $e^{-i\omega\bar{v}}$ на H^+ и $e^{-i\omega u}$ на \mathcal{I}^+ , описывает стационарный поток теплового излучения, падающего в черную дыру.

Дальнейшие сведения о свойствах вакуумных состояний $|0_S\rangle$ (иногда называемого вакуумом Бульвара [59, 60]), $|0_K\rangle$ и $|0_U\rangle$ можно получить, анализируя показания детектора частиц в точке с фиксированной шварцшильдовой радиальной координатой $r = R$. Для безмассового поля в двумерном случае можно найти функцию отклика детектора (3.55) в явном виде, воспользовав-

шись вайтмановскими функциями

$$D_S^+(x, x') = -\frac{1}{4\pi} \ln [(\Delta u - i\epsilon)(\Delta v - i\epsilon)], \quad (8.79)$$

$$D_K^+(x, x') = -\frac{1}{4\pi} \ln [(\Delta \bar{u} - i\epsilon)(\Delta \bar{v} - i\epsilon)], \quad (8.80)$$

$$D_U^+(x, x') = -\frac{1}{4\pi} \ln [(\Delta \bar{u} - i\epsilon)(\Delta v - i\epsilon)]. \quad (8.81)$$

Собственное время детектора, находящегося в точке $r = R$, определяется соотношением

$$d\tau = (1 - 2M/R)^{1/2} dt, \quad (8.82)$$

причем $\Delta u = \Delta v = \Delta t$ и, как следует из (3.19),

$$\Delta \bar{u} = -4Me^{R^*/4M}(e^{-t/4M} - e^{-t'/4M}), \quad (8.83)$$

$$\Delta \bar{v} = 4Me^{R^*/4M}(e^{t/4M} - e^{t'/4M}). \quad (8.84)$$

Подстановка выражения (8.79) для вакуума Булвара в формулу для функции отклика детектора (3.55) приводит к выражению, в точности совпадающему с соответствующей величиной для детектора, покоящегося в двумерном пространстве Минковского в случае обычного вакуумного состояния поля. Так же как и в этом случае, находим, что $\mathcal{F}(E) = 0$ при $E > 0$, т. е. детектор не обнаруживает частиц в состоянии $|0_s\rangle$.

В случае вакуума Унру подстановка (8.81) в (3.55) с учетом соотношений (8.82) и (8.84) приводит к функции отклика в единицу собственного времени, совпадающей с (4.54) при $\omega = 0$ и $\kappa = [16M^2(1 - 2M/R)]^{-1/2}$. Таким образом,

$$\mathcal{F}_U(E)/\text{ед. собств. времени} = 1/E(e^{E/k_B T} - 1), \quad (8.85)$$

где $k_B T = [64\pi^2 M^2(1 - 2M/R)]^{-1/2}$. Так же как и в случае ускоренно движущегося зеркала, для которого было получено выражение (4.54), детектор регистрирует поток частиц с видимой температурой T при $T_0 = 1/8\pi k_B M$, определяемой соотношением Толмена (4.98). Этот вывод согласуется с (8.27), если учесть, что $\kappa = (4M)^{-1}$ для шварцшильдовой черной дыры. По мере приближения детектора к горизонту ($R \rightarrow 2M$) температура воспринимаемого им потока бесконечно растет. Это связано с тем, что детектор, находящийся на фиксированном расстоянии от черной дыры, является неинерциальным. Величина ускорения по отношению к локальной свободной падающей системе отсчета равна $M/[R^2(1 - 2M/R)^{1/2}]$. Это ускорение приводит к тому, что детектор дополнительно регистрирует частицы, как в случае пространства Минковского (разд. 3.3). По мере приближения к горизонту ускорение стремится к бесконечности; то же происходит с температурой (ср. (3.68)).

Для случая вакуума $|0_K\rangle$ расчет аналогичен; он приводит к результату, отличающемуся от (8.85) коэффициентом 2, что соответствует термостату с излучением при видимой температуре T .

Отклик детектора частиц в четырехмерном случае исследовался приближенно Унру [468] и Канделасом [88]. В частности, Канделас вычислил функцию отклика при $R \rightarrow 2M$ и $R \rightarrow \infty$ для каждого из трех вакуумных состояний, рассмотренных выше, и получил результаты, согласующиеся с результатами расчетов для двумерной модели.

Подробный анализ свойств вакуумных состояний $|0_S\rangle$, $|0_K\rangle$ и $|0_U\rangle$ дан в работе Фуллинга [222].

8.4. Исследование тензора энергии-импульса

Вычисление $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ в построенном выше «вакуумном» состоянии с помощью теории, развитой в гл. 6, не вызывает принципиальных затруднений. В двумерном случае результаты удается получить в замкнутой форме. Но сначала полезно провести общее исследование $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ в духе аксиом Уолда (разд. 6.6). Это было сделано Кристенсеном и Фуллингом [119].

Начнем с двумерного «шварцшильдова» случая. Подставив $C = (1 - 2M/r)$ в (8.8), ковариантное условие сохранения (6.142) приведем к виду

$$\langle T^r_t \rangle = \text{const}, \quad (8.86)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \langle T^r_r \rangle \right] = \frac{M}{r^2} \mathcal{T}, \quad (8.87)$$

где \mathcal{T} — след $\langle T^{\mu}_{\mu} \rangle$, и предполагается, что все компоненты $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ не зависят от времени. Интегрируя (8.87) с учетом $\langle T^t_t \rangle = \mathcal{T} - \langle T^r_r \rangle$, находим

$$\langle T_{\mu}^{\nu} \rangle = \langle T_{\mu}^{(1)\nu} \rangle + \langle T_{\mu}^{(2)\nu} \rangle + \langle T_{\mu}^{(3)\nu} \rangle, \quad (8.88)$$

где в координатах (t, r^*)

$$\langle T_{\mu}^{(1)\nu} \rangle = \begin{bmatrix} \frac{-1}{(1-2M/r)} H(r) + \mathcal{T}(r) & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1-2M/r)} H(r) \end{bmatrix}, \quad (8.89)$$

$$\langle T_{\mu}^{(2)\nu} \rangle = \frac{K}{M^2} \frac{1}{(1-2M/r)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (8.90)$$

$$\langle T_{\mu}^{(3)\nu} \rangle = \frac{Q}{M^2} \frac{1}{(1-2M/r)} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (8.91)$$

$$H(r) = M \int_{2M}^r \mathcal{T}(\rho) \rho^{-2} d\rho, \quad (8.92)$$

причем постоянные K и Q определяются выбором квантового состояния.

Рассмотрим сначала состояние $|0_s\rangle$. Этот случай был подробно исследован Блюмом [54] и Булваром [59, 61]. На \mathcal{U}^\pm это состояние совпадает с обычным вакуумом в пространстве Минковского $|0_M\rangle$, поэтому излучение на бесконечности отсутствует. Следовательно, можно положить $K=0$ и $Q=M^2H(\infty)$, так что (8.88) обращается в нуль при больших r . Воспользовавшись формулами (6.121) и (7.2), получим

$$\mathcal{T}(r) = -M/6\pi r^3 \quad (8.93)$$

и, подставляя это выражение в (8.92), найдем

$$H(r) = -(1/384\pi M^2) + (M^2/24\pi r^4). \quad (8.94)$$

Таким образом, для состояния $|0_s\rangle$ $Q=1/384\pi$ и $\langle T_\mu{}^\nu \rangle$ сводится к выражению (8.47) (с $e=0$). Следовательно, $|0_s\rangle$ — состояние вакуума около статической звезды.

Но оно не может соответствовать случаю черной дыры, на что указывают следующие соображения. Заметим, (ср. (4.17) — (4.19)), что

$$T_{uu} = \frac{1}{4}(T_{tt} + T_{r^*r^*} - 2T_{tr^*}), \quad (8.95)$$

и из (8.88) — (8.91) находим

$$\langle T_{uu} \rangle = -\frac{1}{2}(H + Q/M^2) + \frac{1}{4}(1 - 2M/r)\mathcal{T} \rightarrow -Q/2M^2 \quad (8.96)$$

при $r \rightarrow 2M$. Но координаты Шварцшильда сингулярны на горизонте. Для исследования поведения тензора энергии-импульса вблизи горизонта перейдем к координатам Крускала (3.19), регулярным в этой области. В координатах Крускала будем иметь

$$\langle T_{\bar{u}\bar{u}} \rangle = -(Q/32M^4) e^{-r/M} \bar{v}^{-2} (1 - r/2M)^{-2}. \quad (8.97)$$

Это выражение расходится при $r \rightarrow 2M$, за исключением случая $Q=0$. Величина $\langle T_{\bar{u}\bar{u}} \rangle$ описывает физическую ситуацию на горизонте событий, т. е. то, что измеряет свободно падающий наблюдатель [222]. Следовательно, состояние $|0_s\rangle$ является нефизическим, если метрика имеет шварцшильдову форму в окрестности точки $r=2M$. Иначе говоря, если попытаться создать такое квантовое состояние в присутствии черной дыры, то обратная реакция приведет к существенному изменению гравитационного поля в окрестности $r=2M$.

Обращаясь к другому выбору постоянных, рассмотрим случай симметрии во времени, когда требуется, чтобы $\langle T_\mu{}^\nu \rangle$ было регулярным как на горизонте прошлого, так и на горизонте

будущего. Анализ выражения $\langle T_{vv} \rangle$ при $r \rightarrow 2M$ показывает, что в этом случае необходимо положить $K = Q = 0$. Тогда $\langle T_{\mu}{}^{\nu} \rangle = \langle T^1{}_{\mu}{}^{\nu} \rangle$, и при $r \rightarrow \infty$ эта величина сводится к

$$\frac{1}{12} \pi (k_B T)^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (8.98)$$

где $T = 1/8k_B M = \kappa/2\pi k_B$. Это выражение представляет собой тензор энергии-импульса равновесного теплового излучения при температуре T ; следовательно, выбранное квантовое состояние соответствует вакууму Израэля — Хартля — Хокинга $|0_k\rangle$.

Наконец, чтобы описать процесс испарения Хокинга, необходимо, чтобы присутствовал лишь уходящий поток теплового излучения, для которого тензор энергии-импульса при больших r имеет вид

$$\frac{1}{12} \pi (k_B T)^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (8.99)$$

где $T = 1/8\pi k_B M$. Таким образом, требуется, чтобы плотность и поток энергии совпадали, для чего необходимо (при $Q = 0$) выполнение соотношения

$$K = \frac{1}{2} M^2 [H(\infty) - \mathcal{F}(\infty)] = \frac{1}{2} M^3 \int_{2M}^{\infty} \mathcal{F}(\rho) \rho^{-2} d\rho, \quad (8.100)$$

если заметить, что $\mathcal{F}(\infty) = 0$. Это замечательное соотношение дает поток Хокинга при $r = \infty$ (т. е. величину K/M^2) в виде интеграла от следа тензора энергии-импульса. Поскольку мы знаем, что в силу тепловой природы боголюбовского преобразования $K \neq 0$ (должен быть поток энергии, если спектр тепловой), это доказывает существование аномального следа \mathcal{F} . В гл. 6 существование аномального следа было установлено из более тонких соображений, связанных с перенормировкой $\langle T_{\mu\nu} \rangle$. Теперь, следуя работе Кристенсена и Фуллингa [119], мы установили его необходимость совершенно иначе, не прибегая к соображениям о перенормировке.

Конечно, получить величину \mathcal{F} из соотношения (8.100) невозможно, хотя, если предположить, что она должна иметь чисто геометрический вид, можно заключить, что $\mathcal{F} \sim R$, поскольку R является единственным геометрическим скаляром размерности (длина)⁻² в двумерном случае. Поэтому, зная K , можно найти аномальный коэффициент и наоборот. Из соотношения (8.99) или (8.93) имеем $K = -(768\pi)^{-1}$, следовательно, $\mathcal{F} = -R/24\pi$. Мы потребовали, чтобы $Q = 0$, поэтому тензор энергии-импульса будет регулярным на горизонте будущего H^+ , что соответствует вакууму Унру $|0_U\rangle$. Но тензор энергии-импульса не регулярен на H^- .

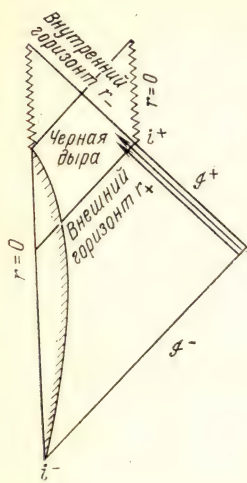


Рис. 28. Диаграмма Пенроуза сферической звезды, коллапсирующей с образованием заряженной черной дыры Рейсснера — Нордстрема. (Ср. с рис. 25. Изображенное многообразие не полно и может быть продолжено в вертикальном направлении. Но такое продолжение несущественно для данного рассмотрения.) Сингулярность имеет времениподобный характер. Изотропные лучи, падающие из \mathcal{I}^- в поздние моменты времени, сгущаются, испытывая голубое смещение, около r_- .

для которой $C = (1 - 2Mr^{-1} + e^2r^{-2})$. Это пространство-время имеет два горизонта: r_+ , задаваемый формулой (8.42), и еще один горизонт в точке

$$r_- = M - (M^2 - e^2)^{1/2}, \quad (8.101)$$

в которой функция C также обращается в нуль. Этот внутренний горизонт является горизонтом Коши, но он не является горизонтом событий для рассматриваемого пространства-времени (см., например, [287], гл. 5). Соответствующая конформная диаграмма показана на рис. 28, где видно с учетом конформного сжатия \mathcal{I} , что r_- представляет собой поверхность беско-

Заметим, что в случае безмассового фермионного поля изменение планковского множителя на $(e^{\omega/k_B T} + 1)$ приводит к появлению коэффициента $1/2$ в (8.98) и (8.99). Если же учесть, что в этом случае имеются два состояния с различной спиральностью, то результирующие выражения окажутся совпадающими с соответствующими величинами для скалярного случая. Таким образом, мы заключаем, что в двумерном случае конформные аномалии и хокинговский поток одинаковы для спинов 0 и $1/2$, что согласуется с результатами, полученными в гл. 6.

В четырехмерном случае требований сферической симметрии независимо от времени и ковариантного сохранения оказывается недостаточно для того, чтобы однозначно связать след с потоком Хокинга; дополнительный произвол возникает для угловых компонент $\langle T_{\theta^{\theta}} \rangle = \langle T_{\Phi^{\Phi}} \rangle$. Этот случай подробно рассмотрен Кристенсеном и Фуллингом [119], которые привели аргументы, указывающие на качественные ограничения на $\langle T_{\theta^{\theta}} \rangle$. Сделанные в этой работе предположения об асимптотической форме тензора энергии-импульса при $r \rightarrow \infty$ или $2M$ для каждого из трех «вакуумных» состояний были подтверждены явными вычислениями Канделаса [88].

В заключение этого раздела рассмотрим снова кратко двумерную модель черной дыры Рейсснера — Нордстрема,

нечного голубого смещения, так как изотропные лучи из \mathcal{I}^- сгущаются около r_- внутри черной дыры.

Расчет $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ во внутренней области дыры для состояний $|0_U\rangle$ и $|0_K\rangle$ не представляет затруднений [133]. Оказывается [289—291], что $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ расходится на r_- даже в системе координат, которая регулярна в этой области. Общие соображения показывают, что этот результат остается верным и в четырехмерном случае [42, 291]. Можно сделать вывод, что обратное воздействие поляризации вакуума приводит к разрушению внутренней геометрии черной дыры и, вероятно, на горизонте Коши возникает сингулярность, препятствующая возможности аналитического продолжения многообразия в другие асимптотические плоские области пространства-времени [356, 436].

Наконец, в работе [125] показано, что в случае вращающейся черной дыры внутренний горизонт можно интерпретировать как поверхность отрицательной температуры (в смысле Хокинга), удовлетворяющую некоторому аналогу теоремы о поверхности горизонта (8.62) и связанную с понятием спиновой температуры (см. также [87]).

8.5. Дальнейшее развитие теории

Выполненные детальные исследования квантовых аспектов физики черных дыр и замечательное согласие результатов самых различных теоретических подходов воодушевило многих авторов использовать черные дыры в качестве отправной точки более широкого поиска в квантовой теории поля в искривленном пространстве и даже в квантовой гравитации. В частности, Хокинг с сотрудниками составили обширную программу исследований, в которой центральную роль играют тепловые аспекты физики черных дыр (см. обзор [285]).

Значительная часть последующих работ была связана со свойством периодичности функции Грина в вакуумном состоянии Израэля — Хартля — Хокинга $|0_K\rangle$ (или его обобщении для других пространств) по мнимому шварцшильдову времени (см. с. 288). Учитывая это свойство, предлагается ввести новую координату $\tau = it$ и вместо пространства-времени Шварцшильда рассматривать связанное с ним риманово пространство (с отрицательно определенной метрикой в противоположность псевдориманову пространству с метрикой неопределенного знака), имеющее элемент длины вида Крускала

$$ds^2 = -\left(\frac{2M}{r}\right) e^{r/2M} (dX^2 + dY^2) - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (8.102)$$

где

$$X = 4M [r/2M - 1]^{1/2} e^{r/4M} \cos \kappa \tau,$$

$$Y = 4M [r/2M - 1]^{1/2} e^{r/4M} \sin \kappa \tau.$$

Это пространство имеет нулевой тензор Риччи и топологию $R^2 \times S^2$. Вектор Киллинга σ_τ порождает вращения вокруг точки $X=Y=0$. Эта вращательная симметрия придает переменной τ характер угловой координаты, что влечет за собой требование периодичности: точки, для которых τ отличается на $2\pi/\kappa$, отождествляются. Начало координат $X=Y=0$ соответствует $r=2M$, т. е. горизонту событий. Область, отвечающая внутренней части черной дыры, в частности сингулярность $r=0$, в этом римановом пространстве отсутствует. Хартль и Хокинг [270] использовали это обстоятельство для введения естественной функции Грина, которая при аналитическом продолжении назад в псевдориманово пространство Шварцшильда совпадает с функцией Грина, ассоциируемой с вакуумом $|0_K\rangle$. Тем самым устанавливается красивое соотношение между геометрической симметрией риманова многообразия относительно вращений в плоскости $X-Y$ и тепловым характером излучения Хокинга. Эти выводы непосредственно обобщаются на случай черных дыр Керра — Ньюмена [239, 240].

Замена t на $i\tau$ напоминает способ построения фейнмановского пропагатора в обычной квантовой теории поля в пространстве Минковского (см. с. 31). В разд. 2.8 объяснено, как можно облегчить решение проблемы сходимости в функциональном подходе к квантованию с помощью формальной замены t на $i\tau$ в функциональном интеграле (2.115). При этом экспонента приобретает показатель $-S$ вместо iS , где S — действие в евклидовом пространстве. Эти соображения можно обобщить на случай риманова пространства.

Если для построения производящего функционала $Z[J]$ в виде функционального интеграла по полям, обладающего свойством периодичности по переменной τ с периодом β , использовать действие S в римановом многообразии, то функции Грина, получаемые с помощью (2.117), будут не обычными вакуумными функциями Грина, а тепловыми функциями с температурой $T=1/k_B\beta$.

Связь между функциональным подходом и термодинамикой становится еще более ясной, если заметить, что амплитуда перехода между состояниями поля ϕ_1 в момент t_1 и ϕ_2 в момент t_2 определяется выражением

$$\langle \phi_2, t_2 | \phi_1, t_1 \rangle = \int \mathcal{D}[\phi] e^{iS[\phi]}, \quad (8.103)$$

где интеграл берется по всем значениям поля, заданного в начальный и конечный моменты времени. В картине Шредингера эту амплитуду можно представить в виде $\langle \phi_2 | \exp[-iH(t_2 - t_1)] | \phi_1 \rangle$, где H — гамильтониан. Полагая $t_2 - t_1 = -i\beta$ и

$\phi_2 = \phi_1$ и суммируя по полному набору полевых конфигураций, находим $Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$, где E_n — энергия, соответствующая конфигурации поля ϕ_n . Сравнивая с (2.95), нетрудно видеть, что Z можно отождествить с термодинамической статистической суммой при температуре $T = 1/k_B\beta$ и нулевом значении химического потенциала. С другой стороны, из формулы (8.103) имеем

$$Z = \int \mathcal{D}[\phi] e^{-\hat{S}[\phi]}, \quad (8.104)$$

где интеграл берется по всем полям, удовлетворяющим условию периодичности по τ с периодом β . Таким образом, с помощью этого функционального интеграла в римановом многообразии можно вычислить статистическую сумму и рассмотреть термодинамические свойства системы. (Строгую трактовку соотношения между термодинамикой и функциональным интегралом в пространстве Минковского можно найти, например, в работе [243].)

Этот результат был применен Гиббонсом и Хокингом [236] к самому гравитационному полю (см. также [284]). Если для квантования гравитации применить метод фонового поля (см. гл. 1), то метрику следует представить в виде $g_{\mu\nu} = g_{c\mu\nu} + \bar{g}_{\mu\nu}$, где $g_{c\mu\nu}$ — решение классических уравнений Эйнштейна, а $\bar{g}_{\mu\nu}$ описывает квантовые флуктуации относительно фона. Разлагая действие в функциональный ряд Тейлора относительно классического фонового поля в виде $\hat{S}[g] = \hat{S}[g_c] + S_2[\bar{g}] +$ члены высших порядков, где S_2 квадратично по \bar{g} , для статистической суммы получаем выражение

$$\ln Z = -\hat{S}[g_c] + \ln \int \mathcal{D}[\bar{g}] \exp(-S_2[\bar{g}]) + \\ + \text{члены высших порядков.} \quad (8.105)$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой вклад классического гравитационного поля, второе слагаемое дает однопетлевые поправки, возникающие за счет гравитонов; его можно трактовать аналогично случаю материальных полей, рассмотренному в гл. 6. Члены высших порядков дают вклад многопетлевых гравитонных фейнмановских диаграмм; их последовательный расчет затруднителен ввиду неперенормируемости квантовой гравитации.

Пренебрегая далее всеми слагаемыми, кроме первого (классического) в правой части (8.105), запишем действие в виде (см. разд. 6.6, где нужно положить $G=1$ в используемых в этой главе единицах)

$$\hat{S} = -\frac{1}{16\pi} \int (R - 2\Lambda) g^{1/2} d^4x - \frac{1}{8\pi} \int (\chi - \chi^0) (h^{1/2}) d^3x, \quad (8.106)$$

где g — определитель римановой метрики, h — определитель метрики, индуцируемой на границе многообразия, а χ и χ^0 определены на с. 234. Выбирая в качестве фонового пространство-время Шварцшильда с римановой метрикой (8.102), будем иметь $R = \Lambda = 0$, и $\mathcal{S}[g_c]$ сводится к $4\pi M^2$ [237] (см. также [232]). Таким образом, классический вклад в статистическую сумму определяется выражением

$$\ln Z = -4\pi M^2, \quad (8.107)$$

откуда можно получить температуру $T = 1/k_B\beta = 1/8\pi k_B M$, среднюю энергию $\langle E \rangle_\beta$, энтропию \mathcal{S} с помощью обычных термодинамических соотношений (см., например, [315], § 3.2):

$$\langle E \rangle_\beta = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = M,$$

$$\mathcal{S} = k_B\beta \langle E \rangle_\beta + k_B \ln Z = 4\pi k_B M^2 = \frac{1}{4} k_B \mathcal{A},$$

что совпадает с (8.63).

Этот результат представляется особенно замечательным потому, что он получен из действия для самого классического гравитационного поля, а не путем рассмотрения квантованных материальных полей, как делалось выше. В самом деле, тот факт, что \mathcal{S} оказывается чисто *геометрической* величиной (площадь поверхности горизонта), не зависящей от типов материальных полей, что обычно имеет место для энтропии, указывает на более фундаментальный характер понятия энтропии черной дыры, чем самой квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени, и как подтверждает приведенный расчет, энтропия в действительности является *внутренним* свойством черной дыры. Впервые в физике появилось понятие энтропии, как объективного внутреннего свойства. В традиционном подходе понятие энтропии содержит в себе элемент субъективности, связанный с «крупнозернистостью» описания или нашим неумением различать отдельные микроскопические состояния.

Развитие метода «риманизованного» квантования гравитационного поля привело к установлению связи между черными дырами и инстантонами [107, 238, 283] (см. также [241] относительно обобщения этой идеи на другие пространства) и более глубокому пониманию связи между топологией пространства-времени и квантовой теорией поля [285]. Методы, аналогичные обсуждавшимся выше, были применены к пространствам де Ситтера [237] и Бертоtti — Робинсона [336], в которых также возникают тепловые эффекты. Дальнейшее обсуждение этих вопросов выходит за рамки настоящей книги, и мы отсылаем читателя к цитированной литературе.

Вопрос о рождении частиц вблизи пространственно-временных сингулярностей также привлек к себе внимание. Сильные квантовые эффекты, сопровождающие возрастание кривизны пространства-времени, по-видимому, могут приводить к большой обратной реакции, что существенно при обсуждении вопроса о «космической цензуре». Форд и Паркер [208] исследовали вопрос о возможности предотвращения образования идеализированной голой сингулярности при сжатии сильно заряженного ($e^2 > M^2$) тела вследствие квантовой обратной реакции. Квантование полей вблизи «белых дыр» обсуждали Зельдович, Новиков и Старобинский [501] и Уолд и Рамасвами [488].

Если допустить, что может образовываться сингулярность, вопрос о рождении частиц в ее окрестности усложняется нарушением предсказуемости [287]. В частности, неизвестно, какие граничные условия следует накладывать на квантованные поля в сингулярных точках. Эта проблема также возникает в космологическом случае, как отмечалось в разд. 7.4.

Хокинг [280] пытался связать случайный характер теплового испускания черной дыры с граничными условиями на сингулярности, исходя из того, что рождение пары частиц вблизи горизонта снаружи от черной дыры с последующим удалением частицы на бесконечность и «туннелированием» античастицы в дыру, где она затем попадает в сингулярность, можно рассматривать в духе фейнмановского представления об античастицах как частицах, движущихся «назад во времени». Можно представить себе, что испускаемая частица образуется в сингулярности, движется назад во времени до горизонта, рассеиваясь затем на гравитационном поле в направлении вперед во времени, и становится частицей в хокинговском потоке. Таким способом Хокинг приписывает тепловой характер излучения самой сингулярности. Обобщение этой идеи на произвольные сингулярности привело к формулировке «принципа стохастичности», согласно которому граничные условия в сингулярности должны соответствовать полностью случайному влиянию сингулярности на все, происходящее вне ее. Эта идея, возможно, будет иметь приложения к космологии и белым дырам.

ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ ПОЛЯ

После того как была построена теория свободных квантованных полей в искривленном пространстве-времени, ее наиболее естественным развитием явилось включение в рассмотрение эффектов, обусловленных самодействием и взаимодействием полей негравитационной природы. Хотя это направление только начинает развиваться, основные рамки теории установлены достаточно четко, и в этой заключительной главе описаны формальные приемы расчета процессов рождения частиц и перенормировки $\langle T_{\mu\nu} \rangle$.

При учете взаимодействия между полями сразу возникают два вопроса. Первый из них — в какой мере взаимодействие может стимулировать или подавлять рождение частиц гравитационным полем по сравнению со случаем свободных полей. Конечно, взаимодействия могут привести и к негравитационному рождению частиц, но нас будут в большей степени интересовать процессы, которые запрещены в пространстве Минковского, такие, как одновременное рождение фотона и электрон-позитронной пары.

Второй вопрос касается перенормируемости теории. Будет ли теория (например, квантовая электродинамика), перенормируемая в пространстве Минковского, оставаться перенормируемой в пространстве, имеющем нетривиальную топологию или кривизну? Этот вопрос имеет важнейшее значение, ибо если теория теряет свою предсказательную силу, как только учитываются слабые гравитационные возмущения, ее справедливость представляется сомнительной. Довольно трудно дать общее доказательство перенормируемости, и до настоящего времени существенное продвижение было связано с теорией скалярного поля с взаимодействием $\lambda\phi^4$ ¹⁾.

Третий круг вопросов, вызывающих большой интерес, связан с излучением черных дыр. Остается ли процесс Хокинга тепловым при учете взаимодействий? Если нет, то кажется воз-

¹⁾ Перенормировка в квантовой электродинамике в искривленном пространстве-времени рассматривалась в работе [648*] (см. также [639*, 640*, 643*, 644*, 647*]). — *Прим. перев.*

можным нарушение второго закона термодинамики. Мы обсудим некоторый модельный расчет, в котором тепловой характер излучения действительно сохраняется.

Эта глава имеет целью лишь ввести читателя в круг задач теории взаимодействующих полей в искривленном пространстве-времени. Мы не пытались дать исчерпывающий обзор и ограничились лишь отдельными конкретными примерами.

9.1. Расчет матричных элементов S-матрицы

Рассмотрим общий случай взаимодействующих полей, описываемых плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I, \quad (9.1)$$

где \mathcal{L}_0 — лагранжиан свободного поля, например типа обсуждавшихся в разд. 3.2 и 3.8, а \mathcal{L}_I — лагранжиан взаимодействия, содержащий произведения полей порядка выше квадратичного. Предположим, как и прежде, что пространство является глобально гиперболическим и выбран параметр x^0 , имеющий смысл времени.

Предположим далее, что взаимодействие (9.1) адиабатически выключается в отдаленных прошлом и будущем, где поля, которые мы будем в общем случае изображать символом ϕ , сводятся к свободным полям ϕ_{in} и ϕ_{out} соответственно:

$$\lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \phi(x) = \phi_{\text{in}}(x), \quad (9.2)$$

$$\lim_{x^0 \rightarrow +\infty} \phi(x) = \phi_{\text{out}}(x), \quad (9.3)$$

причем предел понимается в смысле слабой операторной сходимости. Эти асимптотические условия, необходимые для введения представления о частицах, в квантовой теории поля в пространстве Минковского оправданы тем, что в типичной задаче рассеяния частицы в начальном и конечном состояниях действительно находятся на достаточном удалении друг от друга вне области взаимодействия. Лишь в промежуточные моменты времени, когда частицы сближаются, взаимодействие между ними становится существенным. Аналогичные соображения можно использовать и в случае искривленного пространства-времени. Но нетрудно представить себе пространства, для которых асимптотические условия (9.2) и (9.3) не могут быть выполнены. Например, в пространстве-времени, обладающем замкнутыми пространственными сечениями, частицы не могут быть бесконечно удалены друг от друга, и асимптотические условия можно рассматривать лишь как приближенные. Кроме

того, пространство-время может иметь сингулярности, которые ограничивают его в прошлом или будущем, и асимптотические области во времени не существуют. В этом случае можно попытаться прибегнуть к другим физическим или математическим критериям или пытаться иначе сформулировать квантовую теорию поля (см., например, [321]).

Поскольку ϕ_{in} и ϕ_{out} — свободные поля, для них справедливо все, что сказано в разд. 3.2. В частности, эти поля можно представить в виде разложения по полным наборам мод (3.30). Как выяснено в гл. 3, определение положительно-частотных решений в отдаленном прошлом и будущем может быть различным; поэтому будем считать, что u_k^{in} и u_k^{out} представляют собой положительно-частотные моды в этих областях, выбранные, например, с использованием адиабатического определения. Тогда ϕ_{in} и ϕ_{out} можно разложить по каждому из наборов мод:

$$\phi_{\text{in}}(x) = \sum_i (a_i^{\text{in}} u_i^{\text{in}}(x) + a_i^{\text{in} \dagger} u_i^{\text{in}*}(x)) = \quad (9.4a)$$

$$= \sum_i (\bar{a}_i^{\text{in}} u_i^{\text{out}}(x) + \bar{a}_i^{\text{in} \dagger} u_i^{\text{out}*}(x)), \quad (9.4b)$$

$$\phi_{\text{out}}(x) = \sum_i (a_i^{\text{out}} u_i^{\text{in}}(x) + a_i^{\text{out} \dagger} u_i^{\text{in}*}(x)) = \quad (9.5a)$$

$$= \sum_i (\bar{a}_i^{\text{out}} u_i^{\text{out}}(x) + \bar{a}_i^{\text{out} \dagger} u_i^{\text{out}*}(x)). \quad (9.5b)$$

Поскольку в общем случае u_i^{in} не совпадают с u_i^{out} , а связаны с ними некоторым преобразованием Боголюбова вида (3.34), то a_i^{in} с \bar{a}_i^{in} и a_i^{out} с \bar{a}_i^{out} также связаны соответствующими преобразованиями (3.37). Таким образом, в общем случае существуют четыре неэквивалентных вакуумных состояния, определенные соотношениями (ср. (2.19), (3.33)):

$$a_i^{\text{in}} |0, \text{in}\rangle = 0, \quad \forall i, \quad (9.6)$$

$$\bar{a}_i^{\text{in}} |\bar{0}, \text{in}\rangle = 0, \quad \forall i, \quad (9.7)$$

$$a_i^{\text{out}} |0, \text{out}\rangle = 0, \quad \forall i, \quad (9.8)$$

$$\bar{a}_i^{\text{out}} |\bar{0}, \text{out}\rangle = 0, \quad \forall i, \quad (9.9)$$

с каждым из которых ассоциируется пространство Фока. Пространство Фока, построенное на базе $|0, \text{in}\rangle$, связано с пространством, построенным на $|\bar{0}, \text{in}\rangle$, элементами S -матрицы типа (3.45), которые могут быть полностью выражены через боголюбовские коэффициенты. Таким же способом можно связать между собой пространства Фока, построенные на $|0, \text{out}\rangle$ и $|\bar{0}, \text{out}\rangle$. Но связь между пространствами Фока, построенными на $|0, \text{in}\rangle$

и $|0, \text{out}\rangle$, зависит от взаимодействия. При выключении взаимодействия эти пространства становятся эквивалентными.

Поскольку вакуум $|0, \text{in}\rangle$ определен по отношению к положительно-частотным модам в отдаленном прошлом, где точное поле ϕ с учетом взаимодействия совпадает с ϕ_{in} , этот вакуум определяет «физическое» пространство Фока в прошлом. Аналогично, вакуум $|\bar{0}, \text{out}\rangle$, определенный по отношению к положительно-частотным модам в будущем, где ϕ сводится к ϕ_{out} , задает «физическое» пространство Фока в этой области. Поэтому физические взаимодействия «частиц» в искривленном пространстве-времени описываются элементами S -матрицы, связывающими между собой пространства Фока, построенные на $|0, \text{in}\rangle$ и $|\bar{0}, \text{out}\rangle$.

Заметим, что все проблемы, связанные с определением состояний частиц в искривленном пространстве-времени, которые обсуждались в гл. 3, остаются и при учете взаимодействия; лишь в частных случаях, например, когда возможно адиабатическое определение положительных частот или может быть использована конформная симметрия, выбор u_i^{in} и u_i^{out} будет однозначным.

Предположим, что выбрано некоторое определение состояний частиц; тогда возникает проблема вычисления матричных элементов S -матрицы (амплитуд рассеяния) между in- и out-состояниями (разд. 3.2). Некоторое in-состояние $|^1n_{i_1}, ^2n_{i_2}, \dots, \text{in}\rangle$ будет переходить в некоторое out-состояние $|^1\bar{m}_{i_1}, ^2\bar{m}_{i_2}, \dots, \text{out}\rangle$ либо вследствие наличия кривизны пространства-времени, либо из-за взаимодействия. Оказывается удобным разделить эти два эффекта с помощью следующего приема. Разложим состояние $|^1\bar{m}_{i_1}, ^2\bar{m}_{i_2}, \dots, \text{out}\rangle$ по полному набору out-состояний без черты сверху аналогично (3.41). Тогда соответствующий элемент S -матрицы запишется в виде

$$\begin{aligned} &\langle \text{out}, \dots, ^2\bar{m}_{i_2}, ^1\bar{m}_{i_1} | ^1n_{i_1}, ^2n_{i_2}, \dots, \text{in} \rangle = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l_1 \dots l_k} \langle \text{out}, \dots, ^2\bar{m}_{i_2}, ^1\bar{m}_{i_1} | l_{i_1}, l_{i_2}, \dots, l_{i_k}, \text{out} \rangle \times \\ &\quad \times \langle \text{out}, l_{i_k}, \dots, l_{i_2}, l_{i_1} | ^1n_{i_1}, ^2n_{i_2}, \dots, \text{in} \rangle. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Существование S -матрицы в искривленном пространстве-времени исследовал Уолд [485, 486]. Вероятность перехода между выбранными in- и out-состояниями есть

$$\langle \text{out}, \dots, ^2\bar{m}_{i_2}, ^1\bar{m}_{i_1} | ^1n_{i_1}, ^2n_{i_2}, \dots, \text{in} \rangle^2. \quad (9.11)$$

Амплитуда $\langle \text{out}, \dots, ^2\bar{m}_{i_2}, ^1\bar{m}_{i_1} | l_{i_1}, l_{i_2}, \dots, l_{i_k}, \text{out} \rangle$ полностью описывается боголюбовскими коэффициентами (см.

(3.44)) и не зависит от деталей взаимодействия. С другой стороны, амплитуда $\langle \text{out}, 1_{j_k}, \dots, 1_{j_2}, 1_{j_1} | {}^1 n_{i_1}, {}^2 n_{i_2}, \dots, \text{in} \rangle$ определяется взаимодействием, но этот матричный элемент связывает состояния, основанные на одном и том же определении положительных частот. Поэтому его можно вычислять, используя обычные методы, применяемые в случае пространства Минковского. Здесь мы обсудим два различных метода.

Превый — метод редукции матричных элементов S -матрицы, называемый методом ЛСЦ (Лемана — Симанчика — Циммермана) [338]. Вывод редукционных формул проводится по существу так же, как и в случае пространства Минковского (см., например, [49], § 16.7). В частности, для скалярного поля с самовзадействием, когда \mathcal{L}_0 задается выражением (3.24), получаем (ср. [49] формула (16.81))

$$\begin{aligned} & \langle \text{out}, 1_{p_1}, \dots, 1_{p_l} | 1_{q_1}, \dots, 1_{q_m}, \text{in} \rangle / \langle \text{out}, 0 | 0, \text{in} \rangle = \\ & = i^{m+l} \prod_{i=1}^m \int d^n x_i [-g(x_i)]^{1/2} \prod_{j=1}^l \int d^n y_j [-g(y_j)]^{1/2} u_{q_i}(x_i) u_{p_j}^*(y_j) \times \\ & \times [\square x_i + m^2 + \xi R(x_i)] [\square y_j + m^2 + \xi R(y_j)] \tau(y_1, \dots, y_l, x_1, \dots, x_m), \end{aligned} \quad (9.12)$$

где принято $p_i \neq q_j \forall i, j$ и введена функция Грина

$$\tau(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{\langle \text{out}, 0 | T(\phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_m)) | 0, \text{in} \rangle}{\langle \text{out}, 0 | 0, \text{in} \rangle}. \quad (9.13)$$

Детали вывода соотношений типа (9.12) имеются в работах [39, 48], в которых получены редукционные формулы для полной амплитуды (9.11) в терминах функций Грина $\langle \text{out}, \bar{0} | \dots | 0, \text{in} \rangle$ и боголюбовских коэффициентов.

При выводе соотношения (9.12) два момента заслуживают специального внимания. Во-первых, в отличие от случая пространства Минковского, для которого $|0, \text{out}\rangle = |0, \text{in}\rangle$ (с точностью до фазового множителя), вакуумное состояние $|0, \text{in}\rangle$ в искривленном пространстве-времени в общем случае неустойчиво, т. е. $\langle \text{out}, 0 | 0, \text{in} \rangle \neq 1$. Эта неустойчивость связана не с различным определением положительных частот (состояния $|0, \text{in}\rangle$ и $|0, \text{out}\rangle$ основаны на одном и том же определении), а с неинвариантностью относительно группы Пуанкаре в искривленном пространстве-времени, которая может приводить к дополнительному рождению частиц по сравнению с рассмотренным в гл. 3. Этот вопрос будет рассмотрен в разд. 9.3.

Второе замечание относится к использованию теоремы Гаусса при выводе соотношения (9.12), когда были опущены поверхностные члены на пространственноподобной бесконечности.

Если пространство-время имеет пространственноподобные границы, эти поверхностные члены необходимо удерживать, используя физически обоснованные граничные условия.

Построим теперь функции Грина (9.13). В практических расчетах найти точные выражения, как правило, не удастся, и приходится использовать некоторые приближенные методы, например теорию возмущений. Это можно сделать, вводя так называемую матрицу эволюции U [187] (см., например, [49], гл. 17), которая приводит к практически такому же ряду теории возмущений для S , что и представление взаимодействия, к которому мы обратимся ниже.

Альтернативный метод состоит в использовании формулировки теории с помощью интегралов по траекториям (разд. 2.8) и построении производящего функционала для функций Грина с учетом взаимодействия в виде

$$Z[J] = \int \mathcal{D}[\phi] \exp \left\{ i \int \mathcal{L}_I[\phi] d^n x \right\} \exp \left\{ i \int [\mathcal{L}_0[\phi] + J[\phi] d^n x] \right\}. \quad (9.14)$$

Если плотность лагранжиана взаимодействия — полиномиальная функция полей, то выражение (9.14) можно переписать в виде

$$Z[J] = \exp \left\{ i \int \mathcal{L}_I \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right] d^n x \right\} \int \mathcal{D}[\phi] \exp \left\{ i \int [\mathcal{L}_0[\phi] + J\phi] d^n x \right\}. \quad (9.15)$$

Функциональный интеграл в (9.15) теперь есть просто свободный производящий функционал, который мы обозначим $Z_0[J]$. Таким образом,

$$Z[J] = \exp \left\{ i \int \mathcal{L}_I \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right] d^n x \right\} Z_0[J]. \quad (9.16)$$

Для скалярных полей Z_0 определяется выражением (2.126), которое справедливо и в искривленном пространстве-времени. Следовательно, в этом случае

$$Z[J] \sim [\det(-G_F)]^{1/2} \exp \left\{ i \int \mathcal{L}_I \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right] d^n x \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} i \int J(y) G_F(y, z) J(z) d^n y d^n z \right\}, \quad (9.17)$$

где коэффициент пропорциональности не зависит от метрики и тока J и не влияет на функции Грина. Разлагая в ряд экспоненты в (9.17) и выполняя функциональное дифференцирование, получаем разложение теории возмущений для Z , полностью выраженное через фейнмановский пропагатор для свободного

поля. Это разложение можно использовать в (2.117) с целью получения разложений для точных функций Грина.

Важно иметь в виду, что граничные условия, закладываемые в функции Грина взаимодействующих полей, порождаемые выражением (9.17), зависят от выбора фейнмановского пропагатора G_F . Поскольку мы хотим получить функции Грина (9.13), соответствующие одному определению положительно-частотных мод u_i , фейнмановский пропагатор G_F нужно задавать в этих модах:

$$iG_F(x, y) = \theta(x^0 - y^0) \sum_i u_i(x) u_i^*(y) + \theta(y^0 - x^0) \sum_i u_i^*(x) u_i(y) \quad (9.18)$$

(ср. (7.74)). При таком выборе пропагатора будем иметь

$$\tau_c(x_1, x_2, \dots, x_m) = i^{-m} \left[\frac{\delta^m \ln Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \dots \delta J(x_m)} \right]_{J=0}, \quad (9.19)$$

где индекс c при τ_c означает, что в разложении по теории возмущений величины (9.17) в (9.19) учтены лишь связанные фейнмановские диаграммы. Это нетрудно проверить в явной форме для некоторых конкретных лагранжианов; в следующем разделе будет рассмотрен пример.

Метод исследования взаимодействующих квантованных полей в искривленном пространстве-времени, используемый уже довольно долго [213, 470], состоит в разложении производящего функционала (или функций Грина) в функциональные степенные ряды (ряды Вольтерра) по отклонению метрики от метрики Минковского. Каждый член разложения можно далее рассматривать в рамках обычной теории возмущений в пространстве Минковского, разлагая по степеням константы взаимодействия.

Вместо разложения величины $Z[J]$ на практике удобнее записывать разложение для $\ln Z$, входящего в (9.19). Полагая (ср. (6.25))

$$W[J; g_{\mu\nu}] = -i \ln Z[J; g_{\mu\nu}], \quad (9.20)$$

где

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \quad (9.21)$$

можно записать разложение W в ряд Вольтерра (см., например, [411], § 1, 2):

$$W[J; g_{\mu\nu}] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\prod_{i=1}^m d^n x_i h^{\mu_i \nu_i}(x_i) \times \right. \\ \left. \times W_{\mu_1 \nu_1, \mu_2 \nu_2, \dots, \mu_m \nu_m}[J; x_1, x_2, \dots, x_m] \right), \quad (9.22)$$

где

$$W_{\mu_1\nu_1, \mu_2\nu_2, \dots, \mu_m\nu_m} [J; x_1, x_2, \dots, x_m] = \\ = \left[\frac{\delta^m W [J; g_{\mu\nu}]}{\delta g^{\mu_1\mu_1}(x_1) \delta g^{\mu_2\nu_2}(x_2) \dots \delta g^{\mu_m\nu_m}(x_m)} \right] g^{\mu_1\nu_1} = \eta^{\mu_1\nu_1}. \quad (9.23)$$

При $J = 0$ выражение (9.22) определяет разложение эффективного действия в теории с учетом взаимодействия, причем первый член этого разложения, как видно из формулы (6.13), содержит вакуумное среднее значение тензора энергии-импульса

$$W_{\mu_1\nu_1} [0] = \langle 0 | T_{\mu_1\nu_1} | 0 \rangle \quad (9.24)$$

взаимодействующего поля в пространстве Минковского. Эта величина исследовалась многими авторами [86, 122, 212, 215]. Члены более высокого порядка имеют более сложную структуру и помимо вкладов типа $\langle 0 | T_{\mu_1\nu_1}, T_{\mu_2\nu_2}, \dots, T_{\mu_m\nu_m} | 0 \rangle$ содержат также вклады типа «чайки», которые возникают при функциональном дифференцировании $T_{\mu\nu}[g_{\mu\nu}]$ [213].

Этот метод построения теорий взаимодействующих полей в искривленном пространстве-времени имеет три недостатка: 1) вычисления удается выполнить лишь в случае небольших отклонений метрики пространства-времени от плоской, 2) метод не дает информации об эффектах, обусловленных топологией пространства-времени (см., например, [180]), 3) крайне трудно определить, какое квантовое состояние вакуума при этом используется. Поэтому мы не будем развивать здесь этот подход и, основываясь на формулировке теории с помощью функциональных интегралов, будем рассматривать лишь разложения теории возмущений по степеням константы взаимодействия, такие, как (9.17).

Как уже упоминалось, в пространстве Минковского существует другой метод вычисления амплитуд $\langle \text{out}, {}^1j_k, \dots, {}^1j_2, {}^1j_1 | {}^1n_i, {}^2n_i, \dots, \text{in} \rangle$, фигурирующих в (9.11), который легко применить и в данном случае. Это расчеты в картине взаимодействия, в которой поля удовлетворяют свободным уравнениям, а динамическая информация содержится в векторах состояний системы. (См., например, [406], гл. 4, где дана ковариантная формулировка подхода в пространстве Минковского. Формулировка картины взаимодействия в искривленном пространстве-времени дана в работах [46, 82].)

В картине взаимодействия состояния $|\psi\rangle$ удовлетворяют уравнению Шредингера

$$\mathcal{H}_I(x) |\psi[\Sigma]\rangle = i \frac{\delta |\psi[\Sigma]\rangle}{\delta \Sigma(x)}, \quad (9.25)$$

где \mathcal{H}_I — плотность гамильтониана взаимодействия, которая в случае связи без производных равна

$$\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I, \quad (9.26)$$

а $\Sigma(x)$ — пространственноподобная гиперповерхность Коши, проходящая через точку x . Для случая поверхности постоянно-го времени (9.25) имеет вид

$$\mathcal{H}_I(x) |\psi(x^0)\rangle = i \frac{\partial |\psi(x^0)\rangle}{\partial x^0}. \quad (9.27)$$

Решение уравнения (9.25) записывается с помощью унитарного оператора U , определяемого соотношением

$$|\psi[\Sigma]\rangle = U[\Sigma, \Sigma_0] |\psi[\Sigma_0]\rangle, \quad (9.28)$$

который, как следует из уравнения (9.25), удовлетворяет уравнению Томонага — Швингера [424—426, 461]

$$\mathcal{H}_I(x) U[\Sigma, \Sigma_0] = i \frac{\delta U[\Sigma, \Sigma_0]}{\delta \Sigma(x)} \quad (9.29a)$$

с начальным условием

$$U[\Sigma_0, \Sigma_0] = 1. \quad (9.29b)$$

Записывая соотношения (9.29) в виде интегрального уравнения

$$U[\Sigma, \Sigma_0] = 1 - i \int_{\Sigma_0}^{\Sigma} \mathcal{H}_I(x') U[\Sigma', \Sigma_0] d^n x', \quad (9.30)$$

можно с помощью итераций найти следующее решение в замкнутой форме:

$$U[\Sigma, \Sigma_0] = P \exp \left[-i \int_{\Sigma_0}^{\Sigma} \mathcal{H}_I(x') d^n x' \right], \quad (9.31)$$

где символ упорядочения P имеет тот же смысл, что и символ хронологического упорядочения T , с той лишь разницей, что для фермионных полей при перестановках не следует изменять знак.

Согласно теореме Хаага [261], величина U не может быть хорошо определенным оператором в гильбертовом пространстве состояний (см., например, [406], § 8.4), поэтому мы будем понимать (9.31) как чисто формальное выражение, используемое для получения S -матрицы, определяемой как

$$S = U[\Sigma^{\text{out}}, \Sigma^{\text{in}}]. \quad (9.32)$$

Здесь Σ^{out} — поверхность в out-области в бесконечно далеком будущем, а Σ^{in} — поверхность в in-области в бесконечно уда-

ленном прошлом. Тогда из (9.28) получаем

$$|\psi[\Sigma^{\text{out}}]\rangle = S |\psi[\Sigma^{\text{in}}]\rangle, \quad (9.33)$$

и в соответствии с (9.31) S имеет разложение

$$S = \sum_{m=0}^{\infty} S^{(m)}, \quad (9.34)$$

где

$$S^{(0)} = 1, \quad (9.35)$$

$$S^{(m)} = \frac{(-i)^m}{m!} \int P(\mathcal{H}_I(x_1) \mathcal{H}_I(x_2) \dots \mathcal{H}_I(x_m)) d^n x_1 d^n x_2 \dots d^n x_m. \quad (9.36)$$

Выберем теперь состояние $|\psi[\Sigma^{\text{in}}]\rangle$, принадлежащее пространству Фока, построенному с помощью гейзенберговского вакуума $|0, \text{in}\rangle$ (см. (9.6)). Тогда можно утверждать, что на поверхности Σ^{in} поле ϕ в картине взаимодействия должно совпадать с гейзенберговским полем. Но на Σ^{in} гейзенберговское поле сводится к свободному полю ϕ_{in} (см. (9.2)). Следовательно, то же самое относится и к полю в картине взаимодействия. Поскольку поле в представлении взаимодействия удовлетворяет уравнению для свободного поля, отсюда следует, что оно должно совпадать с ϕ_{in} в любой момент времени.

Рассмотрим, в частности, начальное состояние

$$|\psi[\Sigma^{\text{in}}]\rangle = |1_{i_1}, 1_{i_2}, \dots, 1_{i_k}, \text{in}\rangle. \quad (9.37)$$

Тогда соотношение (9.33) имеет вид

$$|1_{i_1}, 1_{i_2}, \dots, 1_{i_k}, \text{out}\rangle = S |1_{i_1}, 1_{i_2}, \dots, 1_{i_k}, \text{in}\rangle. \quad (9.38)$$

Заметим, что поскольку оператор S описывает лишь эффекты, обусловленные взаимодействием, вектор $|\psi[\Sigma^{\text{out}}]\rangle$ в левой части (9.38) определен в терминах out-состояний без черты сверху. Поэтому мы получаем другую возможность расчета части амплитуды (9.10), не зависящей от преобразования Боголюбова. С помощью (9.38) находим

$$\begin{aligned} \langle \text{out}, 1_{i_k}, \dots, 1_{i_2}, 1_{i_1} | {}^1 n_{i_1}, {}^2 n_{i_2}, \dots, \text{in} \rangle = \\ = \langle \text{in}, 1_{i_k}, \dots, 1_{i_2}, 1_{i_1} | S^+ | {}^1 n_{i_1}, {}^2 n_{i_2}, \dots, \text{in} \rangle. \end{aligned} \quad (9.39)$$

Правая часть (9.39) может быть рассчитана с точностью до любого порядка теории возмущений с помощью (9.34), причем \mathcal{H}_I в (9.36) строится из полей ϕ_{in} , записанных в виде (9.4).

Независимо от того, используется ли картина взаимодействия или применяется метод редукции и квантование с помощью

функционального интеграла, в теории возникают расходимости, которые следует устранить с помощью перенормировок. Применение описанных выше методов расчета и последующая регуляризация и перенормировка бесконечных величин лучше всего иллюстрируется примером, к которому мы теперь переходим.

9.2. Скалярное поле с самодействием в искривленном пространстве-времени

Рассмотрим теорию скалярного поля с самодействием, описываемую плотностью лагранжиана (9.1); где \mathcal{L}_0 дано выражением (3.24), а \mathcal{L}_I имеет вид

$$\mathcal{L}_I = -\frac{1}{4!} (-g)^{1/2} \lambda \phi^4. \quad (9.40)$$

Это так называемая теория $\lambda\phi^4$.


Особый интерес представляют амплитуды перехода из начального вакуумного состояния в конечное многочастичное состояние, так как такие процессы не могут иметь места в пространстве Минковского. Рассмотрение таких амплитуд позволяет продемонстрировать методы перенормировок, применяемые и в других случаях. Полагая в (9.10) $|{}^1n_{i_1}, {}^2n_{i_2}, \dots, \text{in}\rangle = |0, \text{in}\rangle$, находим

$$\begin{aligned} \langle \text{out}, \dots, {}^2\bar{m}_{i_2}, {}^1\bar{m}_{i_1} | 0, \text{in} \rangle = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i_1 \dots i_k} \langle \text{out}, \dots, {}^2\bar{m}_{i_2}, {}^1\bar{m}_{i_1} | 1_{i_1}, 1_{i_2}, \dots, 1_{i_k}, \text{out} \rangle \times \\ \times \langle \text{out}, 1_{i_k}, \dots, 1_{i_2}, 1_{i_1} | 0, \text{in} \rangle. \end{aligned} \quad (9.41)$$

Первая амплитуда в правой части легко строится с помощью боголюбовских коэффициентов; она является конечной. Рассмотрим поэтому первые несколько вкладов от второй амплитуды.

Чтобы показать подробнее применение двух методов расчета, описанных выше, рассмотрим сначала вычисление амплитуды $\langle \text{out}, 1_{p_1}, 1_{p_2} | 0, \text{in} \rangle$ в теории возмущений. Редукционная формула (9.12) в методе ЛСЦ приводит к следующему выражению для этой амплитуды:

$$\begin{aligned} \frac{\langle \text{out}, 1_{p_1}, 1_{p_2} | 0, \text{in} \rangle}{\langle \text{out}, 0 | 0, \text{in} \rangle} = \\ = \int d^n y_1 d^n y_2 [-g(x_1)]^{1/2} [-g(x_2)]^{1/2} u_{p_1}^*(y_1) u_{p_2}^*(y_2) \times \\ \times i[\square_{y_1} + m^2 + \xi R(y_1)] i[\square_{y_2} + m^2 + \xi R(y_2)] \tau(y_1, y_2). \end{aligned} \quad (9.42)$$



$$\tau_c(y_1, y_2) = \frac{y_1}{y_2} - \frac{1}{2} \frac{y_1}{y_2}$$

Рис. 29. Фейнмановские диаграммы для вкладов нулевого и первого порядка в полный связный пропагатор $\tau_c(y_1, y_2)$ в теории $\lambda\phi^4$.

Необходимо, следовательно, построить функцию Грина $\tau(y_1, y_2)$, называемую также точным пропагатором (с учетом взаимодействия).

Подставляя (9.40) в (9.27) и разлагая экспоненты, нетрудно найти члены в любом порядке по λ , которые дают в выражении для $\ln Z[J]$ вклад, квадратичный по J . Именно такие члены вносят не исчезающий вклад в величину

$$\tau_c(y_1, y_2) = - \left[\frac{\delta^2 \ln Z[J]}{\delta J(y_1) \delta J(y_2)} \right]_{J=0} \quad (9.43)$$

(см. (9.19)). Несвязные диаграммы дают вклад в τ , который можно рассчитать, комбинируя связные компоненты; мы не будем касаться этого вопроса, заметим лишь, что несвязные диаграммы дают вклад в полную амплитуду.

В первом порядке по λ , воспользовавшись формулами (9.17) и (9.43), получаем выражение

$$\tau_c(y_1, y_2) = iG_F(y_1, y_2) - \frac{1}{2} \lambda \int G_F(y_1, x) G_F(x, x) G_F(x, y_2) [-g(x)]^{1/2} d^n x, \quad (9.44)$$

которое сводится к $iG_F(y_1, y_2)$ при $\lambda = 0$, чего и следовало ожидать (ср. (9.13) и (2.69)). Выражения типа (9.44) удобно изображать с помощью диаграмм Фейнмана. Изображая λ в виде вершины, а $iG_F(x, y)$ — с помощью линии, получаем диаграммы, соответствующие (9.44), как показано на рис. 29, где подразумевается интегрирование по координатам точки при вершине.

В редукционную формулу (9.42) функция Грина входит в виде комбинации

$$\gamma(y_1, y_2) \equiv i [\square_{y_1} + m^2 + \xi R(y_1)] i [\square_{y_2} + m^2 + \xi R(y_2)] \tau(y_1, y_2). \quad (9.45)$$

Подставляя (9.44) в (9.45) и воспользовавшись формулой (3.49), получаем

$$\gamma_c(y_1, y_2) = iK_{y_1 y_2} + \frac{1}{2} \lambda G_F(y_1, y_1) \delta(y_1 - y_2) / [-g(y_1)]^{1/2}, \quad (9.46)$$

где K определяется формулой (6.21) или (6.23). Величина y называется *усеченной функцией Грина*, поскольку ее диаграммное изображение получается из τ_c (рис. 29) отсечением внешних линий. Подставляя (9.46) в (9.42), окончательно находим

$$\frac{\langle \text{out}, 1_{p_1}, 1_{p_2} | 0, \text{in} \rangle}{\langle \text{out}, 0 | 0, \text{in} \rangle} = \frac{1}{2} \lambda \int u_{p_1}^*(y) u_{p_2}^*(y) G_F(y, y) \times \\ \times [-g(y)]^{1/2} d^n y + O(\lambda^2). \quad (9.47)$$

Первое слагаемое в (9.46) не дает вклада в (9.47), так как моды удовлетворяют уравнению свободного поля.

Прежде чем переходить к обсуждению этого результата, а также поправок более высокого порядка и других амплитуд, покажем, как можно получить его в картине взаимодействия. Будем исходить из формулы (9.39), которая в этом случае дает

$$\langle \text{out}, 1_{p_1}, 1_{p_2} | 0, \text{in} \rangle = \langle \text{in}, 1_{p_1}, 1_{p_2} | S^+ | 0, \text{in} \rangle, \quad (9.48)$$

и, ограничиваясь первым порядком по λ , подставим первые два члена разложения (9.34) для S . Первый член вклада не дает, поэтому остается (с учетом (9.26) и (9.40)) величина

$$\langle \text{out}, 1_{p_1}, 1_{p_2} | 0, \text{in} \rangle = \\ = -\frac{i\lambda}{4!} \int \langle \text{in}, 1_{p_1}, 1_{p_2} | T(\phi^4(x)) | 0, \text{in} \rangle [-g(x)]^{1/2} d^n x + O(\lambda^2). \quad (9.49)$$

Матричный элемент в подынтегральном выражении (9.49) можно вычислить, подставляя (9.4а) для ϕ (напомним, что в картине взаимодействия $\phi = \phi_{\text{in}}$), или с помощью теоремы Вика [497] (см., например, [406], гл. 4). В обоих случаях получаем

$$\langle \text{in}, 1_{p_1}, 1_{p_2} | T(\phi^4(x)) | 0, \text{in} \rangle = \\ = 12 u_{p_1}^*(x) u_{p_2}^*(x) i G_F(x, x) \langle \text{in}, 0 | 0, \text{in} \rangle, \quad (9.50)$$

где G_F определяется формулой (9.18). Подставляя это выражение в (9.49) и замечая, что

$$\langle \text{out}, 0 | 0, \text{in} \rangle = \langle \text{in}, 0 | 0, \text{in} \rangle + O(\lambda), \quad (9.51)$$

приходим снова к формуле (9.47). При таком методе расчета учитываются (в высших порядках) как связанные, так и несвязные диаграммы. Деление на (9.51) устраняет несвязные петлевые диаграммы, не содержащие внешних линий (см., например, [49], § 17.6 или [423], § 146).

Анализ выражения (9.47) сразу приводит к затруднению, так как величина $G_F(y, y)$ бесконечна при $n \rightarrow 4$. В самом деле, мы считали n произвольным в (9.47), предвидя необходимость

регуляризации этого выражения, что наиболее просто осуществляется с помощью продолжения по размерности. Природа полюсного члена может быть установлена с помощью разложения де Витта — Швингера для G_F . Из (3.138) или (6.29) находим

$$G_F(y, y) \approx -\frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \sum_{j=0}^{\infty} (m^2)^{1/2n-j-1} a_j(y) \Gamma\left(j - \frac{1}{2}n + 1\right) =$$

$$= -\frac{2i}{(4\pi)^2} \frac{\left[m^2 + \left(\xi - \frac{1}{6}\right)R\right]}{(n-4)} + G_F^{\text{конечн}}(y, y), \quad (9.52)$$

где величина $G_F^{\text{конечн}}(y, y)$ конечна при $n \rightarrow 4$. Полюсные члены можно устранить с помощью перенормировки констант в лагранжиане, как в случае пространства Минковского. Но есть очевидное различие, проявляющееся в наличии члена, пропорционального скалярной кривизне Риччи R . Мы увидим, что этот дополнительный полюсный член можно устранить перенормировкой постоянной ξ , отсутствующей в теории поля в пространстве Минковского.

Метод перенормировок, основанный на размерной регуляризации, был продолжен т'Офтом [457] и исследован в работах [121, 123], где была выполнена в явном виде перенормировка в теории $\lambda\phi^4$ с точностью до четвертого порядка в пространстве Минковского (см. также [373]). Полный лагранжиан (9.1) имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(-g)^{1/2} [g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - (m_R^2 + \xi_R R(x)) \phi_R^2] -$$

$$- (-g)^{1/2} \left[\frac{1}{4!} \lambda \phi^4 + \frac{1}{2} (\delta m^2 + \delta \xi R) \phi^2 \right], \quad (9.53)$$

где m_R и ξ_R — «перенормированные константы», связанные с «голыми константами» m и ξ соотношениями

$$m_R^2 = m^2 - \delta m^2, \quad \xi_R = \xi - \delta \xi. \quad (9.54), (9.55)$$

Для сокращения записи здесь опущены индексы B у голых величин. Первый член в (9.53), содержащий перенормированные величины, мы будем рассматривать теперь как плотность свободного лагранжиана \mathcal{L}_0 , а второй член — как новую плотность лагранжиана взаимодействия. Цель состоит в сокращении полюсных членов в S -матрице с помощью подходящего выбора δm^2 и $\delta \xi$. Предполагая, что это возможно, запишем

$$\delta m^2 = m_R^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=\nu}^{\infty} b_{\nu j} \lambda_R^j (n-4)^{-\nu} \equiv m_R^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu}(\lambda_R) (n-4)^{-\nu}, \quad (9.56)$$

$$\delta \xi = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=\nu}^{\infty} d_{\nu j} \lambda_R^j (n-4)^{-\nu} \equiv \sum_{\nu=1}^{\infty} d_{\nu}(\lambda_R) (n-4)^{-\nu}, \quad (9.57)$$

где также предусмотрена возможность перенормировки константы связи с помощью соотношения

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_R + \delta\lambda = \mu^{4-n} \left[\lambda_R + \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{j=v}^{\infty} a_{vj} \lambda_R^j (n-4)^{-v} \right] \equiv \\ &\equiv \mu^{4-n} \lambda_R + \sum_{v=1}^{\infty} a_v(\lambda_R) (n-4)^{-v}. \quad (9.58)\end{aligned}$$

Как и в разд. 6.2, здесь введен произвольный масштаб массы μ , чтобы сделать полное действие безразмерным.

Необходимо также принять во внимание возможную перенормировку поля («волновой функции»), при которой

$$\phi \rightarrow \phi_R = Z^{-1/2} \phi, \quad (9.59)$$

где

$$Z = 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{j=v}^{\infty} c_{vj} \lambda_R^j (n-4)^{-v} \equiv \sum_{v=1}^{\infty} c_v(\lambda_R) (n-4)^{-v}. \quad (9.60)$$

Теория перенормируема, если все полюсные члены в элементах S -матрицы могут быть устранены с помощью некоторого выбора величин a_{vj} , b_{vj} , c_{vj} и d_{vj} .

Если второй член в (9.53) рассматривать как лагранжиан взаимодействия, т. е.

$$\mathcal{L}_I = -(-g)^{1/2} \left[\frac{1}{4!} \lambda \phi^4 + \frac{1}{2} (\delta m^2 + \delta \xi R) \phi^2 \right], \quad (9.61)$$

то легко вычислить усеченную функцию Грина γ_c :

$$\begin{aligned}\gamma_c(y_1, y_2) &= iK_{y_1 y_1} + \lambda_R \left\{ \frac{1}{2} \mu^{4-n} G_F(y_1, y_1) - i \sum_{v=1}^{\infty} [m_k^2 b_{v_1} + \right. \\ &\left. + d_{v_1} R(y_1)] (n-4)^{-v} \right\} [-g(y_1)^{-1/2} \delta^n(y_1 - y_2)] + O(\lambda_R^2) \quad (9.62)\end{aligned}$$

вместо (9.46). При получении этого выражения использованы представления (9.56) — (9.58) и удержаны лишь члены, линейные по λ_R . Все величины в (9.62) выражены через перенормированные константы ξ_R и m_R^2 , а не через «голые» параметры, как это было раньше. Поскольку функция Грина $\tau_c(y_1, y_2)$ представляет собой вакуумное среднее от произведения двух полей ϕ (см. (9.13)), можно ожидать, что из-за перенормировки полей τ_c будет умножено на Z^{-2} . Но при построении усеченной функции Грина выражение дважды делится на G_F и, следовательно, на Z^4 . Таким образом, выражение (9.62) следует умножить на Z^2 . Единственный вклад в элементы S -матрицы порядка λ_R , который возникает в результате этого умножения,

дает первый член в правой части (9.62):

$$\begin{aligned} \lambda_R \sum_{v=1}^{\infty} c_{v1} (n-4)^{-v} iK_{y_1 y_2} = \\ = i\lambda_R \sum_{v=1}^{\infty} c_{v1} (n-4)^{-v} [\square_{y_1} + m_R^2 + \xi_R R(y_1)] [-g(y_1)]^{-1/2} \times \\ \times \delta^n(y_1 - y_2). \end{aligned} \quad (9.63)$$

Подставляя (9.52) (с заменой $m \rightarrow m_R$, $\xi \rightarrow \xi_R$) в (9.62), нетрудно убедиться, что все полюсные члены могут быть устранены из $\gamma_c(y_1, y_2)$, если выбрать

$$\begin{aligned} c_{v1} = 0, \quad \forall v; \quad d_{v1} = b_{v1} = 0, \quad \forall v \neq 1; \\ b_{11} = -1/16\pi^2; \quad d_{11} = -(\xi_R - \frac{1}{6})/16\pi^2. \end{aligned} \quad (9.64)$$

При таком выборе параметров подстановка (9.62) в редукционные формулы теперь приводит к амплитудам, конечным при $n \rightarrow 4$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\langle \text{out}, 1_{p_1}, 1_{p_2} | 0, \text{in} \rangle}{\langle \text{out}, 0 | 0, \text{in} \rangle} \right]_{\text{рен}} = \frac{1}{2} \lambda_R \int u_{p_1}^*(y) u_{p_2}^*(y) \left\{ G_F^{\text{конечн}}(y, y) + \right. \\ \left. + (i/8\pi^2) \left[m_R^2 + \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) R(y) \right] \ln \mu \right\} [-g(y)]^{1/2} d^4 y. \end{aligned} \quad (9.65)$$

Появление произвольного массового параметра μ в этой амплитуде связано с неоднозначностью перенормировочной процедуры, присущей любой схеме перенормировок. Изменение масштаба μ изменяет соотношение между голыми и перенормированными константами, что отражает необходимость фиксирования значений λ_R , m_R и ξ_R с помощью эксперимента. (См. обсуждение на с. 171. В связи с перенормировкой тензора энергии-импульса мы вернемся к этому вопросу ниже.)

Аналогично рассчитываются многочастичные амплитуды [40, 47, 81—83]. Расходимость имеет лишь четырехчастичная амплитуда, ее перенормировка изложенным методом фиксирует коэффициенты a_{vj} в (9.58). Таким образом, перенормировка двухчастичных и четырехчастичных амплитуд определяет все коэффициенты в выражениях (9.56)—(9.58) и (9.60) и, следовательно, в лагранжиане скалярного поля. Но, как мы увидим ниже, остается еще расходимость амплитуд вакуум—вакуум.

Чтобы выяснить, как устранить эту расходимость с помощью перенормировки, напомним, что эффективное действие $W[g_{\mu\nu}] = W[0; g_{\mu\nu}]$ (см. (9.20)) связано с вакуумной амплитудой соотношением

$$W[g_{\mu\nu}] = -i \ln \langle \text{out}, 0 | 0, \text{in} \rangle = -i \ln Z[0]. \quad (9.66)$$

Поэтому следует ожидать, что эта добавочная расходимость может быть устранена перенормировкой констант в обобщенном эйнштейновском действии так же, как и в случае свободных полей, рассмотренном в разд. 6.2. Что это действительно так, было проверено Банчем и Панангаденом [81] с точностью до второго порядка по λ_R . Аналогичные перенормировки оказались необходимы и в безмассовой квантовой электродинамике в пространстве де Ситтера [65, 180, 434, 435].

Здесь мы рассмотрим перенормировку амплитуды вакуум — вакуум с точностью до первого порядка по λ_R . Выбирая картину взаимодействия, можем записать

$$\begin{aligned}\langle \text{out}, 0 | 0, \text{in} \rangle &= \langle \text{in}, 0 | S | 0, \text{in} \rangle = \\ &= \langle \text{in}, 0 | 0, \text{in} \rangle + \langle \text{in}, 0 | S^{(1)} | 0, \text{in} \rangle + O(\lambda_R^2),\end{aligned}\quad (9.67)$$

где использовано разложение (9.34). Подстановка в (9.66) с учетом разложения логарифма дает

$$W[g_{\mu\nu}] = -i \ln \langle \text{in}, 0 | 0, \text{in} \rangle - i \frac{\langle \text{in}, 0 | S^{(1)} | 0, \text{in} \rangle}{\langle \text{in}, 0 | 0, \text{in} \rangle} + O(\lambda_R^2). \quad (9.68)$$

Заметим, что величина $\langle \text{in}, 0 | 0, \text{in} \rangle$ не предполагалась нормированной на единицу. Это лишь вопрос удобства; если считать, что норма этого вектора равна величине

$$\langle \text{in}, 0 | 0, \text{in} \rangle = [\det(-G_F)], \quad (9.69)$$

входящей в выражение (9.17) (без учета взаимодействия), то

$$W_0 \equiv -i \ln \langle \text{in}, 0 | 0, \text{in} \rangle \quad (9.70)$$

и при подстановке W_0 в (6.13) будем иметь $\langle \text{in}, 0 | T_{\mu\nu} | 0, \text{in} \rangle / \langle \text{in}, 0 | 0, \text{in} \rangle$.

Но если величина W не предназначена для вычисления среднего значения тензора энергии-импульса, то можно нормировать $\langle \text{in}, 0 | 0, \text{in} \rangle$ на единицу; тогда первый член в (9.68) обращается в нуль.

Воспользовавшись формулами (9.26), (9.36) и выражением (9.61) для плотности лагранжиана взаимодействия, получим

$$\begin{aligned}\frac{\langle \text{in}, 0 | S^{(1)} | 0, \text{in} \rangle}{\langle \text{in}, 0 | 0, \text{in} \rangle} &= i \int d^n x [-g(x)]^{1/2} \left\{ \frac{\lambda}{8} G_F^2(x, x) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{2} (\delta m^2 + \delta \xi R) G_F(x, x) \right\} = i \int d^n x [-g(x)]^{1/2} \times \\ &\times \left\{ \frac{\lambda_R}{8} G_F^2(x, x) + \frac{i \lambda_R [m_R^2 + (\xi_R - 1/6) R]}{32 \pi^2 (n - 4)} G_F(x, x) \right\} + O(\lambda_R^2),\end{aligned}\quad (9.71)$$

где во втором слагаемом использованы выражения (9.56) — (9.58) с коэффициентами (9.64). Воспользовавшись формулой (9.52) для G_F , будем иметь

$$\frac{\langle \text{in}, 0 | S^{(1)} | 0, \text{in} \rangle}{\langle \text{in}, 0 | 0, \text{in} \rangle} = i \int d^n x [-g(x)]^{1/2} \times \\ \times \left\{ \frac{\lambda_R}{8} [G_F^{\text{конечн}}(x, x)]^2 + \frac{\lambda_R}{512\pi^4} \frac{[m_R^2 + (\xi_R - 1/6)R]^2}{(n-4)^2} \right\}. \quad (9.72)$$

Полюсные члены, пропорциональные $(n-4)^{-1}$, сократились в этом выражении после перенормировки параметров m и ξ . Но остается еще двойной полюс, который нельзя устранить таким способом и который приводит к появлению двойного полюса в эффективном действии (9.68). Эта расходимость может быть устранена перенормировкой констант в обобщенном эйнштейновском лагранжиане. Для этого необходима перенормировка ньютоновской постоянной, космологической постоянной и коэффициента перед R^2 .

Доказательство того, что описанная схема перенормировок позволяет устранить все расходимости, возникающие в теории с взаимодействием $\lambda\phi^4$ во всех порядках теории возмущений, нетривиально уже в случае пространства Минковского (см., например, [62], а также [351], где показано, что вычитания, предложенные в [62], эквивалентны перенормировке констант в действии). В искривленном пространстве-времени такое доказательство оказывается еще более сложным не только из-за технических трудностей, но и в связи с некоторыми принципиальными проблемами [48]. В частности, упрощения, достигаемые путем использования инвариантности относительно группы Пуанкаре, которые важны при доказательстве перенормируемости теории в пространстве Минковского (см., например, [406], § 4.2 и 5.1), невозможны в искривленном пространстве-времени. Одним из непосредственных следствий этого, с которым мы уже столкнулись, является возникновение полюсных членов, пропорциональных скалярной кривизне, и связанная с этим необходимость перенормировки параметра ξ [674*]. Однако R не единственный новый скаляр, который может появиться. Например, полюсный член, пропорциональный $G_F^{\text{конечн}}$, возникает из члена G_F^2 в (9.71). Этот скаляр в общем случае представляет собой крайне сложную нелокальную функцию геометрии пространства-времени. (Конечно, асимптотическое разложение $G_F^{\text{конечн}}$ в первой строчке формулы (9.52) локально.)

На языке диаграмм Фейнмана член типа G_F^2 в (9.71) представляется диаграммой, показанной на рис. 30. Полюс,

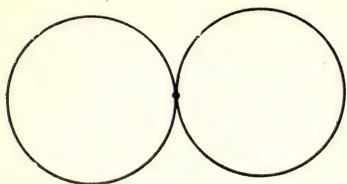


Рис. 30. Фейнмановская диаграмма для вклада первого порядка в амплитуду вакуум — вакуум в теории $\lambda\phi^4$.

пропорциональный $G_F^{\text{конечн}}$, возникает в результате умножения полюса, ассоциируемого с одной из петель, на конечную часть другой петли. Эта расходимость известна как расходимость «перекрытия», и ее уничтожение существенно для возможности построения перенормируемого эффективного действия W в терминах чисто локальных величин. В случае (9.71) эта расходимость уничтожается членом, возникающим при перенормировке m и ξ . Сокращение расходимостей перекрытия необходимо также в двухчастичных элементах S -матрицы, если их конечность должна обеспечиваться (локальной) перенормировкой параметров m и ξ . Банч показал, что такое сокращение действительно имеет место и что теория $\lambda\phi^4$ остается перенормируемой в искривленном пространстве-времени.

Тот факт, что при включении взаимодействия, вообще говоря, необходимы дополнительные зависящие от λ перенормировки констант в обобщенном эйнштейновском действии, наводит на мысль, что должен существовать зависящий от λ вклад в конформную аномалию. Для изучения этого вопроса удобно использовать методы ренормгруппы в формулировке т'Офта [457], основанной на размерной регуляризации (см. также [123]).

Основная идея метода уже упоминалась в разд. 6.2. Теория может предсказывать элементы S -матрицы лишь при условии фиксации произвольного масштаба массы μ . Это вносит внутреннюю неопределенность в значения перенормированных констант, которые практически не удастся определить из эксперимента. При изменении μ необходимо изменить значения перенормированных констант таким образом, чтобы элементы S -матрицы сохраняли физические наблюдаемые значения.

Следуя т'Офту, эти изменения, например, для λ_R и m_R (параметр ξ_R или любая другая константа, трактуется аналогично m_R) можно установить, выразив (фиксированные) голые константы λ и m , определяемые формулами (9.54), (9.55), (9.58), через новый масштаб массы μ' , связанный с μ бесконечно малым преобразованием

$$\mu' = (1 + \epsilon)\mu. \quad (9.73)$$

Из формулы (9.58) с точностью до первого порядка по ε находим

$$\begin{aligned} \lambda &= (\mu')^{4-n} [1 + \varepsilon(n-4)] \left\{ \lambda_R + \sum_{v=1}^{\infty} a_v(\lambda_R) (n-4)^{-v} \right\} = \\ &= (\mu')^{4-n} \left\{ \varepsilon(n-4) \lambda_R + \lambda_R + \varepsilon a_1(\lambda_R) + \sum_{v=1}^{\infty} [a_v(\lambda_R) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon a_{v+1}(\lambda_R)] (n-4)^{-v} \right\}. \end{aligned} \quad (9.74)$$

Поскольку это разложение содержит член, пропорциональный $(n-4)$, оно не совпадает с исходным разложением (9.58). Слагаемые такого типа всегда можно добавить к разложениям голых констант в терминах перенормированных констант, поскольку они исчезают для физической размерности пространства-времени $n=4$; это отражает обычную неопределенность при перенормировках. Но если бы мы начинали проводить перенормировки, имея масштаб массы μ' вместо μ , мы не получили бы членов, пропорциональных $(n-4)$, так как таких членов нет в исходном выражении (9.58). Поэтому мы устраним член, пропорциональный $(n-4)$, в (9.74) с помощью преобразования

$$\lambda_R = \tilde{\lambda}_R - \varepsilon(n-4) \tilde{\lambda}_R, \quad (9.75)$$

которое является нетривиальным лишь вне точки $n=4$. В результате этого преобразования (9.74) принимает вид

$$\begin{aligned} \lambda &= (\mu')^{4-n} \left[\tilde{\lambda}_R + \varepsilon a_1(\tilde{\lambda}_R) - \varepsilon \tilde{\lambda}_R \frac{\partial a_1(\tilde{\lambda}_R)}{\partial \tilde{\lambda}_R} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{v=1}^{\infty} (n-4)^{-v} \left(a_v(\tilde{\lambda}_R) + \varepsilon a_{v+1}(\tilde{\lambda}_R) - \varepsilon \tilde{\lambda}_R \frac{\partial a_{v+1}(\tilde{\lambda}_R)}{\partial \tilde{\lambda}_R} \right) \right] + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (9.76)$$

Точно так же преобразование (9.75) в (9.56) приводит к новому разложению для параметра m :

$$\begin{aligned} m^2 &= m_R^2 - \varepsilon m_R^2 \tilde{\lambda}_R \frac{\partial b_1(\tilde{\lambda}_R)}{\partial \tilde{\lambda}_R} + \\ &\quad + m_R^2 \sum_{v=1}^{\infty} (n-4)^{-v} \left(b_v(\tilde{\lambda}_R) - \varepsilon \tilde{\lambda}_R \frac{\partial b_{v+1}(\tilde{\lambda}_R)}{\partial \tilde{\lambda}_R} \right) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (9.77)$$

Чтобы привести выражения (9.76) и (9.77) снова к стандартному виду (9.56) и (9.58) (с заменой μ на μ'), который мы

получили бы, используя с самого начала параметр μ' , введем величины

$$\lambda'_R = \lambda_R + \varepsilon \left(a_1(\tilde{\lambda}_R) - \tilde{\lambda}_R \frac{\partial a_1(\tilde{\lambda}_R)}{\partial \tilde{\lambda}_R} \right), \quad (9.78)$$

$$(m'_R)^2 = m_R^2 - \varepsilon m_R^2 \tilde{\lambda}_R \frac{\partial b_1(\tilde{\lambda}_R)}{\partial \tilde{\lambda}_R}. \quad (9.79)$$

Так как параметры λ и m фиксированы, для сохранения перенормированных значений элементов S -матрицы при использовании масштаба μ' вместо μ следует перейти к новым величинам λ_R и m_R , согласно соотношениям (9.78) и (9.79), которые при $n = 4$ сводятся к

$$\lambda'_R = \lambda_R + \varepsilon \left(a_1(\lambda_R) - \lambda_R \frac{\partial a_1(\lambda_R)}{\partial \lambda_R} \right), \quad (9.80)$$

$$(m'_R)^2 = m_R^2 - \varepsilon m_R^2 \lambda_R \frac{\partial b_1(\lambda_R)}{\partial \lambda_R}. \quad (9.81)$$

С помощью этих соотношений для бесконечно малых преобразований λ_R и m_R^2 можно получить следующие дифференциальные уравнения:

$$\mu \frac{\partial \lambda_R}{\partial \mu} = a_1(\lambda_R) - \lambda_R \frac{\partial a_1(\lambda_R)}{\partial \lambda_R} \equiv \beta(\lambda_R), \quad (9.82)$$

$$\mu \frac{\partial m_R^2}{\partial \mu} = -m_R^2 \lambda_R \frac{\partial b_1(\lambda_R)}{\partial \lambda_R} \equiv -m_R^2 \gamma_m(\lambda_R). \quad (9.83)$$

Функции β и γ_m иногда называют β - и γ -функциями Каллана — Симанчика из-за их роли в уравнениях ренормгруппы, впервые установленной Калланом [85] и Симанчиком [445]. Мы увидим, что аналогичную роль эти функции выполняют и в связи с конформными аномалиями [44, 65, 181].

Лагранжева плотность для свободного скалярного поля (3.24) в случае четырех измерений инвариантна относительно конформных преобразований (3.1) и (3.7) при условии, что $m = 0$ и $\xi = 1/6$. Плотность лагранжиана взаимодействия (9.40) также инвариантна относительно этих преобразований в четырехмерном случае. Как отмечалось в разд. 6.3, эта инвариантность формально гарантирует исчезновение следа вакуумного среднего значения тензора энергии-импульса. Мы уже видели, что перенормировка констант в обобщенном эйнштейновском действии приводит к нарушению конформной инвариантности и сопровождается появлением аномального следа даже в случае свободных полей. Аномалию следа для свободного поля

можно отделить от вклада взаимодействия, так как эффективное действие (9.66) для взаимодействующего поля в соответствии с (9.17) может быть записано в виде суммы

$$W = W_0 + W_I, \quad (9.84)$$

где W_0 — эффективное действие для свободного поля (6.25), а W_I — часть, зависящая от взаимодействия:

$$W_I = i \ln \left[\left\{ \exp i \int d^n x \mathcal{L}_I \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right\} \times \right. \\ \left. \times \exp \left[-\frac{1}{2} i \int J(y) G_F(y, z) J(z) d^n y d^n z \right] \right]_{J=0}. \quad (9.85)$$

Поэтому, используя соотношение (см. (6.117))

$$\langle T_{\mu}^{\mu}(x) \rangle = - \frac{1}{[-g(x)]^{1/2}} \frac{\delta W[\Omega^2 g_{\mu\nu}]}{\delta \Omega} \Big|_{\Omega=1}, \quad (9.86)$$

получаем

$$\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle = \langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_0 + \langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_I, \quad (9.87)$$

где $\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_0$ — аномалия следа свободного поля, а $\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_I$ — вклад, зависящий от взаимодействия, возникающий при подстановке W_I вместо W в (9.86).

В случае взаимодействующих полей, вообще говоря, невозможно сохранить конформную инвариантность не только эффективного действия, но и просто действия. Причина состоит в том, что необходимо перенормировать параметры m и ξ , поэтому они не могут сохранить значения $m=0$ и $\xi=1/6$, необходимые для обеспечения конформной инвариантности. Эти параметры становятся неопределенными, и лишь перенормированные константы m_R и ξ_R можно определить с помощью эксперимента. В некоторой выбранной схеме регуляризации голые и перенормированные константы можно связать соотношениями (9.54) и (9.55), где δm^2 и $\delta \xi$ имеют вполне определенные значения. Например, в схеме т'Офта при условии, что доказана возможность успешной перенормировки массы на основе (9.56), равенство нулю m_R означает, что $m=0$. Но в общем случае $\delta \xi$ и δm^2 совершенно произвольны, и если используется другая схема регуляризации, то равенство $m_R=0$ не обязательно влечет за собой $\delta m=0$. Так будет, например, в случае регуляризации с помощью раздвижки точек [46].

Поскольку в схеме т'Офта условие $m_R=0$ влечет за собой $\delta m^2=0$, можно поставить вопрос о том, существует ли такое ξ_R , для которого $\delta \xi=0$. Из соотношения (9.64) следует, что если $\xi=1/6$, то $\delta \xi=0$ с точностью до первого порядка по λ_R .

Но вычисления показывают [40, 81], что во втором порядке это соотношение нарушается. Если же изменить схему т'Офта, допустив зависимость ξ_R от n , то, как показано в работах [65, 122], выбор значения $\xi_R = \xi(n)$ (см. (3.27)) приводит к $\delta\xi = 0$ с точностью до третьего, но не более высоких порядков по λ_R . Выбор $\xi_R = \xi(n)$ эквивалентен выбору $\xi = 1/6$ в (9.57) и последующему добавлению членов, пропорциональных $n - 4$, т. е. использованию обсуждавшейся выше неоднозначности перенормировочной процедуры.

Поскольку $\delta\xi \neq 0$ в четвертом и более высоких порядках и так как действие не является конформно-инвариантным, нельзя ожидать, что вакуумное среднее от тензора энергии-импульса будет хотя бы формально бесследовым. Но полный след можно представить в виде суммы аномальной и неаномальной частей. Аномальная часть возникает из следующих трех источников: из аномалии следа свободного поля, которая, как было показано выше, может рассматриваться отдельно; из перенормировки констант в обобщенном эйнштейновском действии, зависящей от константы связи λ_R . Это дает также и неаномальную часть, но аномальный вклад возникает так же, как и в случае свободного поля. Третий источник аномалии, пожалуй, наиболее интересен; он связан с тем, что выражение (9.40) является конформно-инвариантным лишь в случае четырех измерений. В случае n измерений при преобразованиях (3.1) и (3.7) выражение (9.40) преобразуется к виду

$$\mathcal{L}_I[\bar{g}_{\mu\nu}] = \Omega^{4-n} \mathcal{L}_I[g_{\mu\nu}] = (\mu\Omega)^{4-n} \frac{1}{4!} \left[\lambda_R + \sum_{v=1}^{\infty} a_v(\lambda_R) (n-4)^{-v} \right] \phi^4, \quad (9.88)$$

где использовано соотношение (9.58). Поскольку функция $\Omega(x)$ входит в (9.88) только в виде комбинации $\mu\Omega$, вариацию по Ω можно заменить вариацией по μ в (9.86), рассматривая временно μ как функцию x :

$$\langle T_{\mu}^{\mu}(x) \rangle_I = - \frac{1}{[-g(x)]^{1/2}} \mu \frac{\delta W_I[\Omega^2 g_{\mu\nu}]}{\delta \mu(x)} \Big|_{\substack{\mu(x)=\mu \\ \Omega=1}}. \quad (9.89)$$

Величину (9.89) можно вычислить, воспользовавшись тем, что нам известно изменение λ_R и ξ_R , в точности компенсирующее изменение μ . Пусть $\lambda_R(x)$ и $\xi_R(x)$ выбраны так, что компенсируют вариацию $\mu(x)$. Тогда

$$\left\{ \left[\mu \frac{\delta}{\delta \mu(x)} + \mu \frac{\partial \lambda_R}{\partial \mu} \frac{\delta}{\delta \lambda_R(x)} + \mu \frac{\partial \xi_R}{\partial \mu} \frac{\delta}{\delta \xi_R(x)} \right] W_I[\Omega^2 g_{\mu\nu}] \right\}_{\Omega=1} = 0, \quad (9.90)$$

где $\Omega = 1$ также означает, что $\mu(x) = \mu$, $\lambda_R(x) = \lambda_R$, $\xi_R(x) = \xi_R$. С помощью соотношения (9.82) и аналогичного (9.83) соотношения

$$\gamma_{\xi}(\lambda_R) \equiv -\mu \frac{\partial \xi_R}{\partial \mu} = \lambda_R \frac{\partial d_1(\lambda_R)}{\partial \lambda_R} \quad (9.91)$$

преобразуем (9.90) к виду

$$\left\{ \left[\mu \frac{\delta}{\delta \mu(x)} + \beta(\lambda_R) \frac{\delta}{\delta \lambda_R(x)} - \gamma_{\xi}(\lambda_R) \frac{\delta}{\delta \xi_R(x)} \right] W_I[\Omega^2 g_{\mu\nu}] \right\}_{\Omega=1} = 0, \quad (9.92)$$

напоминающему по форме уравнение ренормгруппы (см., например, [123], уравнение (11)). Воспользовавшись равенством (9.92) для вычисления (9.89), найдем для соответствующего вклада в $\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_I$ выражение

$$\left\{ \frac{1}{[-g(x)]^{1/2}} \left[\beta(\lambda_R) \frac{\delta}{\delta \lambda_R(x)} - \gamma_{\xi}(\lambda_R) \frac{\delta}{\delta \xi_R(x)} \right] \times \right. \\ \left. \times W_I[\lambda_R(x), \xi_R(x)] \right\}_{\substack{\lambda_R(x)=\lambda_R \\ \xi_R(x)=\xi_R}}, \quad (9.93)$$

На практике удобнее не вычислять след тензора энергии-импульса по частям, как это было сделано выше, а пытаться найти его целиком. Но выражение (9.93) иллюстрирует важное различие аномальных следов для свободного поля и для вклада взаимодействия. В то время как аномалия следа для свободного поля не зависит от квантового состояния и локальна, след, возникающий за счет взаимодействия, определяется всей соответствующей частью эффективного действия и, вообще говоря, зависит от состояния поля и не является локальным. В частности, подстановка $\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle$ в (6.166) в общем случае приводит к увеличению плотности энергии со временем, что ассоциируется с процессом рождения частиц в отличие от случая свободного поля, рассмотренного на с. 198. Рождение частиц за счет взаимодействия в таком подходе обсуждалось Бирреллом и Девисом [44]¹⁾. В следующем разделе мы рассмотрим влияние взаимодействия на рождение частиц с другой точки зрения.

9.3. Рождение частиц за счет взаимодействия

При наличии взаимодействий рождение частиц может быть связано с двумя причинами. Во-первых, как и в случае свободного поля, определение положительных частот может различаться

¹⁾ См. также [642*, 650*]. — Прим. перев.

для in- и out-областей. Во-вторых, отсутствие инвариантности относительно группы Пуанкаре делает возможным возникновение энергии и импульса из вакуума. Воспользовавшись результатами, полученными в предыдущих разделах, нетрудно рассчитать число частиц, рождающихся благодаря этим эффектам.

Если выбрать гейзенберговскую картину, то состояние системы будет оставаться фиксированным в течение всего времени. Выберем в качестве такого состояния физический вакуум при малых временах $|0, \text{in}\rangle$. В этой картине операторы описывают динамику поля, в частности операторы числа частиц в ранние и поздние моменты времени различны. При малых временах оператор, описывающий число частиц моды i , связанной с положительно-частотной функцией u_i^{in} (см. (9.4a)), имеет вид

$$N_i^{\text{in}} = a_i^{\dagger \text{in}} a_i^{\text{in}} \quad (9.94)$$

и $\langle \text{in}, 0 | N_i^{\text{in}} | 0, \text{in} \rangle = 0$. В поздние моменты времени поле имеет положительно-частотные моды u_i^{out} и описывается разложением (9.5); поэтому физический оператор числа частиц есть

$$\bar{N}_i^{\text{out}} = \bar{a}_i^{\text{out}} \bar{a}_i^{\text{out} \dagger}. \quad (9.95)$$

Таким образом, число частиц, рожденных в состоянии вакуума $|0, \text{in}\rangle$, равно

$$\langle \text{in}, 0 | \bar{N}_i^{\text{out}} | 0, \text{in} \rangle. \quad (9.96)$$

Это среднее значение можно вычислить разными способами. Во-первых, можно записать

$$|0, \text{in}\rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{i_1 \dots i_l} |\bar{1}_{i_1}, \dots, \bar{1}_{i_l}, \text{out}\rangle \langle \text{out}, \bar{1}_{i_1}, \dots, \bar{1}_{i_l} | 0, \text{in}\rangle. \quad (9.97)$$

что в результате подстановки в (9.96) дает произведение средних вида

$$\langle \text{out}, \bar{1}_{i_1}, \dots, \bar{1}_{i_l} | \bar{N}_i^{\text{out}} | \bar{1}_{i_1'}, \dots, \bar{1}_{i_l'}, \text{out} \rangle \quad (9.98)$$

с амплитудами, имеющими вид (9.41). Средние значения (9.98) находятся тривиальным образом, поскольку состояния out-пространства Фока с чертой сверху определены по отношению к операторам \bar{a}_i^{out} , фигурирующим в (9.95); поэтому вся информация заключена в амплитудах (9.41). В этих амплитудах разделены два источника рождения частиц: эффекты перемешива-

ния положительных и отрицательных частот сосредоточены в первой амплитуде в правой части, в то время как вторая амплитуда может быть отличной от нуля лишь при отсутствии инвариантности относительно группы Пуанкаре, за исключением тривиального случая перехода вакуум—вакуум.

Поскольку амплитуды, определяемые с помощью боголюбовских коэффициентов, представляют собой довольно сложные выражения, практически удобнее пользоваться другим способом вычислений, разлагая в ряд в виде

$$|0, \text{in}\rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{i_1 \dots i_l} |1_{i_1}, \dots, 1_{i_l}, \text{out}\rangle \langle \text{out}, 1_{i_l}, \dots, 1_{i_1} | 0, \text{in}\rangle, \quad (9.99)$$

откуда

$$\begin{aligned} \langle \text{in}, 0 | \bar{N}_i^{\text{out}} | 0, \text{in}\rangle = \\ = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{i_1 \dots i_l} \sum_{k_1 \dots k_m} \langle \text{in}, 0 | 1_{k_1}, \dots, 1_{k_m}, \text{out}\rangle \times \\ \times \langle \text{out}, 1_{i_l}, \dots, 1_{i_1} | 0, \text{in}\rangle \langle \text{out}, 1_{k_m}, \dots, 1_{k_1} | \bar{N}_i^{\text{out}} | 1_{i_l}, \dots, 1_{i_1}, \text{out}\rangle \end{aligned} \quad (9.100)$$

Здесь первые два сомножителя в правой части, вообще говоря, отличны от нуля в отсутствие пуанкаре-инвариантности, а последний содержит информацию о рождении частиц вследствие премешивания положительных и отрицательных частот. Последняя амплитуда рассчитывается наиболее просто, если с помощью боголюбовского преобразования (3.38) переписать (9.95) в терминах операторов a_i^{out} , по отношению к которым определены векторы пространства Фока без черты сверху. Для простоты ограничимся пространственно-плоскими моделями Робертсона—Уокера, для которых коэффициенты Боголюбова имеют вид (3.76), (3.77). Тогда с помощью (3.38) запишем

$$\bar{a}_i^{\text{out}} = a_i^* a_i^{\text{out}} - \beta_i^* a_{-i}^{\text{out}+}, \quad (9.101)$$

следовательно,

$$\bar{N}_i^{\text{out}} = |\alpha_i|^2 N_i^{\text{out}} + |\beta_i|^2 a_{-i}^{\text{out}} a_{-i}^{\text{out}+} - \alpha_i \beta_i^* a_i^{\text{out}+} a_{-i}^{\text{out}+} - \alpha_i^* \beta_i a_{-i}^{\text{out}} a_i^{\text{out}}, \quad (9.102)$$

где

$$N_i^{\text{out}} = a_i^{\text{out}+} a_i^{\text{out}}. \quad (9.103)$$

Подстановка (9.102) в (9.100) с учетом лишь членов, дающих ненулевой вклад в сумму, приводит к выражению

$$\begin{aligned}
 \langle \text{in}, 0 | \bar{N}_i^{\text{out}} | 0, \text{in} \rangle &= |\beta_i|^2 + \\
 &+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k_1 \dots k_m} \{ |\alpha_i \langle \text{out}, 1_{k_m}, \dots, 1_{k_1} | 0, \text{in} \rangle|^2 \times \\
 &\times \langle \text{out}, 1_{k_m}, \dots, 1_{k_1} | N_i^{\text{out}} | 1_{k_1}, \dots, 1_{k_m}, \text{out} \rangle - \\
 &- 2 \text{Re} [\alpha_i \beta_i^* \langle \text{in}, 0 | 1_i, 1_{-i}, 1_{k_1}, \dots, 1_{k_m}, \text{out} \rangle \times \\
 &\times \langle \text{out}, 1_{k_m}, \dots, 1_{k_1} | 0, \text{in} \rangle \langle \text{out}, 1_{k_m}, \dots, \\
 &1_{k_1}, 1_{-i}, 1_i | a_i^{\text{out} \dagger} a_{-i}^{\text{out} \dagger} | 1_{k_1}, \dots, 1_{k_m}, \text{out} \rangle] \}. \quad (9.104)
 \end{aligned}$$

При получении первого слагаемого в правой части мы предположили, что амплитуда $\langle \text{in}, 0 | 0, \text{in} \rangle$ нормирована на единицу (см. с. 320). Это первое слагаемое совпадает с числом частиц, рожденных в отсутствие взаимодействия (ср. (3.42)).

Остальные слагаемые возникают из-за взаимодействия и могут быть рассчитаны в рамках теории возмущений. Мы приведем соответствующие выражения лишь с точностью до первого порядка по λ_R . Член, содержащий $|\langle \text{out}, 1_{k_m}, \dots, 1_{k_1} | 0, \text{in} \rangle|^2$, в (9.104) не дает вклада порядка ниже λ_R^2 , и мы опустим его. С другой стороны, член, содержащий боголюбовский коэффициент β , дает вклад порядка λ_R в первое слагаемое с $m=0$ в сумме:

$$\begin{aligned}
 &- 2 \text{Re} [\alpha_i \beta_i^* \langle \text{in}, 0 | 1_i, 1_{-i}, \text{out} \rangle \langle \text{out}, 0 | 0, \text{in} \rangle \times \\
 &\quad \times \langle \text{out}, 1_{-i}, 1_i | a_i^{\text{out} \dagger} a_{-i}^{\text{out} \dagger} | 0, \text{out} \rangle] = \\
 &= - 2 \text{Re} [\alpha_i \beta_i^* \langle \text{in}, 0 | 1_i, 1_{-i}, \text{out} \rangle \langle \text{out}, 0 | 0, \text{in} \rangle]. \quad (9.105)
 \end{aligned}$$

Как было показано в предыдущем разделе, первая амплитуда в (9.105) порядка λ_R , в то время как $\langle \text{out}, 0 | 0, \text{in} \rangle = 1 + O(\lambda_R)$ (в принятой выше нормировке). Поэтому с точностью до первого порядка по λ_R подстановка (9.65) в (9.105) приводит к следующему выражению для перенормированного среднего:

$$\begin{aligned}
 \langle \text{in}, 0 | \bar{N}_i^{\text{out}} | 0, \text{in} \rangle_{\text{рен}} &= |\beta_i|^2 - \text{Re} \left\{ \alpha_i \beta_i^* \lambda_R \int u_i(y) u_{-i}(y) [G_F^{\text{конечн}*}(y, y) - \right. \\
 &\left. - (i/8\pi^2) \left(m_R^2 + \left(\xi_R - \frac{1}{6} \right) R(y) \right) \ln \mu \right] [-g(y)]^{1/2} d^4 y \}. \quad (9.106)
 \end{aligned}$$

Заметим, что вклад первого порядка возникает как комбинация боголюбовского преобразования и взаимодействия. В частности, если $\beta_i = 0$, рождения частиц в первом порядке не происходит.

Возможность рождения частиц в первом порядке по взаимодействию означает, что даже для достаточно слабой связи (т.е. малых λ_R) вклад взаимодействия в полное число частиц будет существенным по сравнению с вкладом $|\beta_i|^2$ от свободного поля. Существование вклада первого порядка было замечено Лотцем [344], Бирреллом и Фордом [46] и Банчем, Панангаденом и Паркером [82], вычислившим среднее значение тензора энергии-импульса в out-области. Численные примеры рождения частиц за счет взаимодействия были приведены в работах [45, 46].

9.4. Другие эффекты взаимодействия

Аппарат, развитый в предыдущем разделе, можно без особого труда применить к случаю вечной черной дыры [48], но он не позволяет сразу сделать вывод о том, остается ли хоккингское излучение тепловым при учете взаимодействий. Ввиду важности тепловой природы хоккингского излучения с точки зрения второго начала термодинамики (разд. 8.2) желательно проверить, что взаимодействия не разрушают это свойство.

Аргументы в пользу того, что излучение Хокинга остается тепловым и при учете взаимодействий, были высказаны Гиббонсом и Перри [239, 240], а затем развиты Хокингом [286]. Вспомним (разд. 8.3), что в случае свободного поля скалярная функция Грина G в состоянии крускаловского вакуума совпадает с тепловой функцией Грина, ассоциируемой со шварцшильдовыми координатами. В частности, она периодична во мнимом шварцшильдовом времени. Гиббсон и Перри отметили, что в теории возмущений функции Грина взаимодействующих полей строятся с помощью функций Грина, соответствующих свободным полям, поэтому функция Грина, связанная с координатами Крускала, обладает тем же свойством периодичности по мнимому времени, автоматически заложенным в ней. Поскольку соображения о периодичности во времени, сформулированные на с. 33, не зависят от того, являются ли H и ϕ свободными или взаимодействующими, эта функция Грина обладает теми же тепловыми свойствами, что и в случае свободного поля.

Если пытаться выйти за рамки теории возмущений, то возникают серьезные технические трудности. Даже в случае пространства Минковского свойства точных квантово-полевых моделей (вне теории возмущений) удастся исследовать лишь в общих чертах (например, используя спектральные представления для пропагаторов). В искривленном пространстве-времени в отсутствие инвариантности относительно группы Пуанкаре продвижение еще более затруднительно.

К счастью, существуют некоторые теоретико-полевые модели, которые можно обобщить на случай искривленного

пространства-времени, не прибегая к теории возмущений или каким-либо приближениям. Одной из них является безмассовая модель Тирринга [455, 456], которая была подробно изучена в случае пространства Минковского (см., например, [330]). Эта модель имеет точные решения, которые можно распространить на случай искривленного пространства-времени [41, 415].

Модель Тирринга представляет собой теорию безмассового поля со спином $1/2$ в двумерном пространстве-времени. Она переносится из пространства Минковского в искривленное пространство-время с помощью метода, использованного для спинорного поля в разд. 3.8. Для лагранжевой плотности получаем сумму плотности лагранжиана (3.176) при $m = 0$ и лагранжиана взаимодействия

$$\mathcal{L}_I = (\det V) \lambda J^\mu J_\mu, \quad (9.107)$$

где

$$J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (9.108)$$

(γ^μ — гамма-матрицы Дирака в искривленном пространстве-времени, см. с. 93).

Построение точного решения в двумерном искривленном пространстве-времени оказывается возможным благодаря конформной инвариантности теории; при этом конформный вес поля равен $1/2$. Поэтому операторное решение уравнения поля, получаемого варьированием действия в пространстве с элементом длины (7.1), имеет вид

$$\psi = C^{-1/4} \tilde{\psi}, \quad (9.109)$$

где $\tilde{\psi}$ — решение в пространстве Минковского [330].

С помощью (9.109) легко получить выражения для функций Грина в пространстве-времени вечной черной дыры в терминах функций Грина в пространстве Минковского, приведенных Клайбером [330]. В частности, используя координаты Крускала для построения функции Грина в состоянии вакуума $|0_K\rangle$ (как и в свободном случае, см. с. 288), находим, что вдали от черной дыры эти функции Грина, рассматриваемые как функции шварцшильдовых координат, соответствуют тепловым функциям Грина в модели Тирринга, построенным Дабином [183]. Это подтверждает в случае модели Тирринга предположение о том, что взаимодействия не разрушают теплового характера излучения Хокинга.

Модель Тирринга является для теории взаимодействующих полей в искривленном пространстве-времени исключением, поскольку она имеет точные решения. В общем случае очень трудно построить решения даже в рамках теории возмущений из-за сложного вида фейнмановских пропагаторов в искривленном

пространстве-времени. Но эффекты, обусловленные топологией, для взаимодействующих полей можно исследовать в случае, когда геометрия пространства остается плоской. В разд. 4.1, например, построена теория свободного квантованного поля в двумерном плоском пространстве-времени, имеющем топологию $R^1 \times S^1$. Нетрудно обобщить эту задачу на случай взаимодействия, воспользовавшись теорией возмущений в импульсном представлении, как это делается в пространстве Минковского.

Покажем это на примере плоского пространства с топологией $R^3 \times S^1$. Фейнмановский пропагатор имеет тот же вид, что и в пространстве Минковского, а именно $(p^2 - m^2 + i\epsilon)^{-1}$, но компонента импульса p^3 (соответствующая измерению, связанному с топологией S^1) принимает дискретные значения

$$p^3 = \begin{cases} 2\pi/L & \text{нескрученное поле;} \\ 2\pi \left(j + \frac{1}{2}\right)/L & \text{скрученное поле,} \end{cases} \quad (9.110)$$

где $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, L — длина периодичности (разд. 4.1). Таким образом, расчет фейнмановских диаграмм можно проводить в импульсном представлении с помощью методов (таких, как фейнмановская параметризация), развитых в теории поля в пространстве Минковского.

Рассчитаем, например, вклад первого порядка в усеченную функцию Грина (9.62) с помощью размерной регуляризации. Чтобы вычислить $G_F(x, x)$ в случае n измерений, будем считать, что дополнительные $n - 4$ измерений связаны с топологией R^1 , т. е. найдем фейнмановский пропагатор в плоском пространстве-времени с топологией $R^3 \times S^1 \times R^{n-4}$. Не существует глубокой причины, заставляющей считать, что дополнительные измерения имеют топологию R^1 ; столь же естественно было бы рассматривать для них топологию S^1 . В схеме размерной регуляризации этот выбор всегда произволен. Но различие топологий для дополнительных измерений может сказываться только в членах в $G_F(x, x)$, пропорциональных $n - 4$, оставляющих (9.62) инвариантным. В высших порядках теории возмущений это различие, как легко показать, может сказаться лишь на членах, в любом случае подвергающихся перенормировке, т. е. тех, которые должны определяться из эксперимента (обычная неопределенность перенормировочной процедуры — см. с. 323).

При сделанном выборе топологии n -мерного пространства получаем

$$G_F(x, x) = \frac{1}{L} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{n-1}p}{(2\pi)^{n-1}} (p^2 - m_R^2 + i\epsilon)^{-1}. \quad (9.111)$$

Интеграл можно вычислить с помощью полезной формулы [458]

$$\int d^n p (m^2 - i\epsilon - 2pk - p^2)^{-\alpha} = \frac{i\pi^{n/2}}{(m^2 + k^2)^{\alpha - n/2}} \frac{\Gamma(\alpha - 1/2n)}{\Gamma(\alpha)}, \quad (9.112)$$

а сумму можно упростить различными способами (см., например, [205], дополнение Б). В пределе $m_R = 0$ выражение (9.111) после взятия интеграла принимает вид

$$\frac{i\pi^{(n-5)/2}}{2L^{n-2}} \Gamma\left(\frac{3-n}{2}\right) + \begin{cases} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |j|^{n-3} & \text{для нескрученных полей,} \\ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left|j + \frac{1}{2}\right|^{n-3} & \text{для скрученных полей.} \end{cases}$$

В этом случае сумма выражается через ζ -функцию Римана, что дает фейнмановский пропагатор

$$G_F(x, x) = -\frac{i\pi^{(n-5)/2}}{2L^{n-2}} \Gamma\left(\frac{3-n}{2}\right) \zeta(3-n) \times \\ \times \begin{cases} 1 & \text{для нескрученных полей,} \\ (2^{3-n} - 1) & \text{для скрученных полей,} \end{cases} \quad (9.113)$$

имеющий конечный предел при $n \rightarrow 4$:

$$G_F(x, x) \xrightarrow{n \rightarrow 4} \begin{cases} -i/(12L^2) & \text{для нескрученных полей,} \\ i/(24L^2) & \text{для скрученных полей.} \end{cases} \quad (9.114)$$

Конечный характер этого результата типичен для безмассовой теории; его можно было предвидеть, если учесть, что в этом случае полюсный член в (9.62), пропорциональный b_{v1} , обращается в нуль (величина R в этом случае также, конечно, равна нулю).

Подставляя (9.114) и (9.62) (и полагая $n = 4$), можно заметить, что это приводит к тому же результату, что и добавление конечной величины к δm^2 (см. (9.56)). В случае нескрученных полей добавка равна $\lambda_R/(24L^2)$, в случае скрученных полей она равна $-\lambda_R/(48L^2)$. Таким образом, поле, являющееся безмассовым на беспетлевом уровне, приобретает эффективную массу m_L в однопетлевом приближении благодаря влиянию топологии:

$$m_L^2 = \lambda_R/(24L^2) \quad \text{нескрученное поле,} \\ m_L^2 = -\lambda_R/(48L^2) \quad \text{скрученное поле.} \quad (9.115)$$

Явление генерации массы в теории $\lambda\phi^4$ было замечено и исследовано в работах [47, 143, 209, 462–464], а аналогичное явление в других теориях рассматривалось в работах [144, 205, 374, 465]. Оно тесно связано с первой поправкой к энергии Казимира [204, 320].

При $\lambda_R > 0$ масса, генерируемая в случае нескрученных полей, вещественная, а для скрученных полей мнимая (тахинонная). Наличие тахинонной массы обычно означает, что теория неустойчива [206] относительно спонтанного нарушения симметрии (см., например, [246]).

Для нескрученных полей в плоском пространстве-времени с топологией $R^3 \times S^1$ влияние топологии подобно влиянию температуры. В частности, в теории $\lambda\phi^4$ при ненулевой температуре также имеет место генерация массы и при достаточно высокой температуре восстановление нарушенных симметрий [162, 327, 328, 329, 495].

В случае скрученных полей между топологическими и температурными эффектами нет простого соотношения, и исследование спонтанного нарушения симметрии значительно усложняется тем, что классические решения полевых уравнений с тахинонной массой не могут быть постоянными (как для нескрученного поля) из-за необходимости удовлетворить антипериодическим граничным условиям [12].

Совместное влияние топологии, ненулевой температуры и кривизны в теориях со спонтанным нарушением симметрии, по-видимому, имело важное значение на ранних стадиях эволюции вселенной. Некоторые возможные следствия обсуждаются, например, в работах [53, 97, 164, 179, 217, 218, 233, 332], где можно найти ссылки на более ранние работы (см. также с. 137).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Abers E. S., Lee B. W.*, Phys. Rep., **9C**, 1 (1973).
2. *Abramowitz M., Stegun I. A.*, eds., Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York, 1965. [Имеется перевод: Справочник по специальным функциям, под ред. Абрамовица М. и Стиган И. — М.: Наука, 1979.]
3. *Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е.* Методы квантовой теории поля в статистической физике. — М.: Физматгиз, 1962.
4. *Adler S. L.*, Phys. Rev., **177**, 2426 (1969).
5. *Adler S. L., Lieberman J., Ng Y. J.*, Ann. Phys. (USA), **106**, 279 (1977).
6. *Adler S. L., Lieberman J., Ng Y. J.*, Ann. Phys. (USA), **113**, 294 (1978).
7. *Ashmore J. F.*, Lett. Nuovo Cimento, **4**, 289 (1972).
8. *Ashtekar A., Magnon A.*, Proc. Roy. Soc. London, **A346**, 375 (1975).
9. *Ashtekar A., Magnon A.*, C. R. Acad. Sci., Ser. A, **281**, 875 (1975).
10. *Audreitsch J., Schäfer G.*, Phys. Lett., **66A**, 459 (1978).
11. *Audreitsch J., Schäfer G.*, Journ. Phys. A: Gen. Phys., **11**, 1583 (1978).
12. *Avis S. J., Isham C. J.*, Proc. Roy. Soc. London, **A363**, 581 (1978).
13. *Avis S. J., Isham C. J.*, Nucl. Phys., **B156**, 441 (1979).
14. *Avis S. J., Isham C. J.*, Quantum field theory and fibre bundles in a general spacetime, в книге: Recent Developments in Gravitation — Cargese 1978, eds., Levy M., Deser S., Plenum Press, New York, 1979.
15. *Avis S. J., Isham C. J.*, Commun. Math. Phys., **72**, 103 (1980).
16. *Avis S. J., Isham C. J., Storey D.*, Phys. Rev. D, **18**, 3565 (1978).
17. *Balazs N. L.*, Astrophys. Journ., **128**, 398 (1958).
18. *Balian R., Duplantier B.*, Ann. Phys. (USA), **104**, 300 (1977).
19. *Balian R., Duplantier B.*, Ann. Phys. (USA), **112**, 165 (1978).
20. *Banach R., Dowker J. S.*, Journ. Phys. A: Gen. Phys., **12**, 2527, 2545 (1979).
21. *Bander M., Itzykson C.*, Rev. Mod. Phys., **38**, 346 (1966).
22. *Bardeen J. W., Carter B., Hawking S. W.*, Commun. Math. Phys., **31**, 161 (1973).
23. *Bargmann V.*, Sitz. Preuss. Akad. Wiss., 346 (1932).
24. *Barrow J. D., Matzner R. A.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **181**, 719 (1977).
25. *Barshay S., Troost W.*, Phys. Lett. **73B**, 437 (1978).
26. *Barut A. O., Muzinich I. J., Williams D. N.*, Phys. Rev., **130**, 442 (1963).
27. *Bekenstein J. D.*, Lett. Nuovo Cimento, **4**, 7371 (1972).
28. *Bekenstein J. D.*, Phys. Rev. D, **7**, 2333 (1973).
29. *Bekenstein J. D.*, Phys. Rev. D, **12**, 3077 (1975).
30. *Bekenstein J. D., Meisels A.*, Phys. Rev. D, **15**, 2775 (1977).
31. *Belifante F. J.*, Physica (Utrecht), **7**, 305 (1940).
32. *Berger B.*, Ann. Phys. (USA), **83**, 458 (1974).
33. *Berger B.*, Phys. Rev. D, **12**, 368 (1975).
34. *Bernard C., Duncan A.*, Ann. Phys. (USA), **107**, 201 (1977).
35. *Bianchi L.*, Lezioni Sulla Teoria dei Gruppi Continui Finiti Transformazioni, Pisa: Spoerri, 1918.
36. *Birrell N. D.*, Proc. Roy. Soc. London, **A361**, 513 (1978).
37. *Birrell N. D.*, Proc. Roy. Soc. London, **A367**, 123 (1979).

38. Birrell N. D., Journ. Phys. A: Gen. Phys., **12**, 337 (1979).
39. Birrell N. D., Ph. D. Thesis, King's College, London, 1979.
40. Birrell N. D., Journ. Phys. A: Gen. Phys., **13**, 569 (1980).
41. Birrell N. D., Davies P. C. W., Phys. Rev. D, **18**, 4408 (1978).
42. Birrell N. D., Davies P. C. W., Nature (London), **272**, 35 (1978).
43. Birrell N. D., Davies P. C. W., Journ. Phys. A: Gen. Phys., **13**, 2109 (1980).
44. Birrell N. D., Davies P. C. W., Phys. Rev. D, **22**, 322 (1980).
45. Birrell N. D., Davies P. C. W., Ford L. H., Journ. Phys. A: Gen. Phys., **13**, 961 (1980).
46. Birrell N. D., Ford L. H., Ann. Phys. (USA), **122**, 1 (1979).
47. Birrell N. D., Ford L. H., Phys. Rev. D, **22**, 330 (1980).
48. Birrell N. D., Taylor J. G., Journ. Math. Phys. (USA), **21**, 1740 (1980).
49. Bjorken J. D., Drell S. D., Relativistic Quantum Mechanics (Chs. 1—10) and Relativistic Quantum Fields (Chs. 11—19), New York: McGraw-Hill, 1965. [Имеется перевод: Релятивистская квантовая теория, т. I, II. — М.: Наука 1978.]
50. Blandford R. D., Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **181**, 489 (1977).
51. Blandford R. D., Thorne K. S., в книге: General Relativity: An Einstein Centenary Survey, eds. S. W. Hawking, W. Israel, Cambridge: Cambridge University Press, 1979.
52. Bleuler K., Helv. Phys. Acta, **23**, 567 (1950).
53. Bludman S. A., Ruderman M. A., Phys. Rev. Lett., **38**, 255 (1977).
54. Blum B. S., Ph. D. Thesis, Brandeis University, 1973.
55. Боголюбов Н. Н. — ЖЭТФ, 1958, т. 34, с. 58.
56. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. — М.: Наука, 1976.
57. Bollini C. G., Giambiagi J. J., Phys. Lett., **40B**, 566 (1972).
58. Bondi H., Gold T., Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **108**, 252 (1948).
59. Boulware D. G., Phys. Rev. D, **11**, 1404 (1975).
60. Boulware D. G., Phys. Rev. D, **12**, 350 (1975).
61. Boulware D. G., Phys. Rev. D, **13**, 2169 (1976).
62. Breitenlohner P., Maison D., Commun. Math. Phys., **52**, 11 (1977).
63. Brown L. S., Cassidy J. P., Phys. Rev. D, **16**, 1712 (1977).
64. Brown L. S., Cassidy J. P., Phys. Rev. D, **15**, 2810 (1977).
65. Brown L. S., Collins J. C., Ann. Phys. (USA), **130**, 215 (1980).
66. Brown L. S., Maclay G. J., Phys. Rev., **184**, 1272 (1969).
67. Brown M. R., Dutton C. R., Phys. Rev. D, **18**, 4422 (1978).
68. Buchholz H., The Confluent Hypergeometric Function, Berlin: Springer-Verlag, 1969.
69. Bunch T. S., Ph. D. Thesis, King's College, London, 1977.
70. Bunch T. S., Phys. Rev. D, **18**, 1844 (1978).
71. Bunch T. S., Journ. Phys. A: Gen. Phys., **11**, 603 (1978).
72. Bunch T. S., Journ. Phys. A: Gen. Phys., **12**, 517 (1979).
73. Bunch T. S., Journ. Phys. A: Gen. Phys., **13**, 1297 (1980).
74. Bunch T. S., Gen. Relativ. Gravit., 1981.
75. Bunch T. S., Ann. Phys. (USA), **131**, 118 (1981).
76. Bunch T. S., Christensen S. M., Fulling S. A., Phys. Rev. D, **18**, 4435 (1978).
77. Bunch T. S., Davies P. C. W., Proc. Roy. Soc. London, **A357**, 381 (1977).
78. Bunch T. S., Davies P. C. W., Proc. Roy. Soc. London, **A356**, 569 (1977).
79. Bunch T. S., Davies P. C. W., Proc. Roy. Soc. London, **A360**, 117 (1978).
80. Bunch T. S., Davies P. C. W., Journ. Phys. A: Gen. Phys., **11**, 1315 (1978).
81. Bunch T. S., Panangaden P., Journ. Phys. A: Gen. Phys., **13**, 919 (1980).
82. Bunch T. S., Panangaden P., Parker L., Journ. Phys. A: Gen. Phys., **13**, 901 (1980).
83. Bunch T. S., Parker L., Phys. Rev. D, **20**, 2499 (1979).

84. *Caianello E. R.*, Combinatorics and Renormalization in Quantum Field Theory, New York: W. A. Benjamin, 1973.
85. *Callan C. G.*, Phys. Rev. D, **2**, 1541 (1970).
86. *Callan C. G., Coleman S., Jackiw R.*, Ann. Phys. (USA), **59**, 42 (1970).
87. *Calvani M., Francaviglia M.*, Acta Phys. Pol., **B9**, 11 (1978).
88. *Candelas P.*, Phys. Rev. D, **21**, 2185 (1980).
89. *Candelas P., Deutsch D.*, Proc. Roy. Soc. London, **A354**, 79 (1977).
90. *Candelas P., Deutsch D.*, Proc. Roy. Soc. London, **A362**, 251 (1978).
91. *Candelas P., Dowker J. S.*, Phys. Rev. D, **19**, 2902 (1979).
92. *Candelas P., Raine D. J.*, Phys. Rev. D, **12**, 965 (1975).
93. *Candelas P., Raine D. J.*, Journ. Math. Phys. (USA) **17**, 2101 (1976).
94. *Candelas P., Raine D. J.*, Phys. Rev. D, **15**, 1494 (1977).
95. *Candelas P., Raine D. J.*, Proc. Roy. Soc. London, **A354**, 79 (1977).
96. *Candelas P., Sciama D. W.*, Phys. Rev. Lett., **38**, 1372 (1977).
97. *Canuto V., Lee J. F.*, Phys. Lett., **B72**, 281 (1977).
98. *Capper D. M., Duff M. J.*, Nuovo Cimento, **A23**, 173 (1974).
99. *Capper D. M., Duff M. J.*, Phys. Lett., **53A**, 361 (1975).
100. *Capper D. M., Duff M. J., Halpern L.*, Phys. Rev. D, **10**, 461 (1974).
101. *Carter B.* в книге: Black Holes, eds. C. DeWitt, B. S. DeWitt, New York: Gordon and Breach, 1975.
102. *Casimir H. B. G.*, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet., **51**, 793 (1948).
103. *Castagnino M., Verbeure A., Weder R. A.*, Phys. Lett., **8A**, 99 (1974).
104. *Castagnino M., Verbeure A., Weder R. A.*, Nuovo Cimento, **26B**, 396 (1975).
105. *Chakraborty B.*, Journ. Math. Phys. (USA), **14**, 188 (1973).
106. *Chandrasekhar S.* в книге: The Plasma in a Magnetic Field, ed. R. K. M. Landshoff, Stanford, California: Stanford University Press, 1958.
107. *Charap J. M., Duff M. J.*, Phys. Lett., **69B**, 445; **71B**, 219 (1977).
108. *Chern S. S.*, Hamburg Abh., **20**, 177 (1955).
109. *Chern S. S.*, Journ. Soc. Indust. Appl. Math., **10**, 751 (1962).
110. *Chernikov N. A., Tagirov E. A.*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **94**, 109 (1968).
111. *Chitre D. M., Hartle J. B.*, Phys. Rev. D, **16**, 251 (1977).
112. *Christensen S. M.*, Bull. Am. Phys. Soc., **20**, 99 (1975).
113. *Christensen S. M.*, Phys. Rev. D, **14**, 2490 (1976).
114. *Christensen S. M.*, Phys. Rev. D, **17**, 946 (1978).
115. *Christensen S. M., Duff M. J.*, Phys. Lett., **76B**, 571 (1978).
116. *Christensen S. M., Duff M. J.*, Nucl. Phys., **B146**, 11 (1978).
117. *Christensen S. M., Duff M. J.*, Nucl. Phys., **B154**, 301 (1979).
118. *Christensen S. M., Duff M. J.*, Nucl. Phys., **B170** FSI, 480 (1980).
119. *Christensen S. M., Fulling S. A.*, Phys. Rev. D, **15**, 2088 (1977).
120. *Cline D. B., Mills F. E.* (eds.), Unification of Elementary Forces and Gauge Theories, London: Harwood Academic Publ., 1978.
121. *Collins J. C.*, Phys. Rev. D, **10**, 1213 (1974).
122. *Collins J. C.*, Phys. Rev. D, **14**, 1965 (1976).
123. *Collins J. C., Macfarlane A. J.*, Phys. Rev., **10**, 1201 (1974).
124. *Critchley R.*, Ph. D. Thesis, University of Manchester, 1976.
125. *Curir A., Francaviglia M.*, Acta Phys. Pol., **B9**, 3 (1978).
126. *Damour T.* в книге: Recent Developments in the Fundamentals of General Relativity, ed. R. Ruffini, Amsterdam: North-Holland, 1977.
127. *Davies P. C. W.*, The Physics of Time Asymmetry, London: Surrey University Press; Berkeley and Los Angeles: University of California Press, 1974.
128. *Davies P. C. W.*, Journ. Phys. A: Gen. Phys., **8**, 365 (1975).
129. *Davies P. C. W.*, Proc. Roy. Soc. London, **A351**, 129 (1976).
130. *Davies P. C. W.*, Phys. Lett., **68B**, 402 (1977).
131. *Davies P. C. W.*, Proc. Roy. Soc. London, **A354**, 529 (1977).
132. *Davies P. C. W.*, Proc. Roy. Soc. London, **A353**, 499 (1977).

133. *Davies P. C. W.*, Rep. Prog. Phys., **41**, 1313 (1978).
134. *Davies P. C. W.*, в книге: Quantum Gravity II: A Second Oxford Symposium, eds. C. J. Isham, R. Penrose, D. W. Sciama, Oxford: Clarendon, 1981.
135. *Davies P. C. W.*, *Fulling S. A.*, Proc. Roy. Soc. London, **A356**, 237 (1977).
136. *Davies P. C. W.*, *Fulling S. A.*, Proc. Roy. Soc. London, **A354**, 59 (1977).
137. *Davies P. C. W.*, *Fulling S. A.*, *Christensen S. M.*, *Bunch T. S.*, Ann. Phys. (USA), **109**, 108 (1977).
138. *Davies P. C. W.*, *Fulling S. A.*, *Unruh W. G.*, Phys. Rev. D., **13**, 2720 (1976).
139. *Davies P. C. W.*, *Unruh W. G.*, Proc. Roy. Soc. London, **A356**, 569 (1977).
140. *Davies P. C. W.*, *Unruh W. G.*, Phys. Rev. D., **20**, 388 (1979).
141. *Delbourgo R.*, *Prasad V. B.*, Nuovo Cimento, **21A**, 32 (1974).
142. *Denardo G.*, *Spallucci E.*, Nuovo Cimento, **53B**, 334 (1979).
143. *Denardo G.*, *Spallucci E.*, Nuovo Cimento, **55B**, 97 (1980).
144. *Denardo G.*, *Spallucci E.*, Nucl. Phys., **B169**, 514 (1980).
145. *Denardo G.*, *Spallucci E.*, Nuovo Cimento, **59A**, 1 (1980).
146. *Deruelle N.*, *Ruffini R.*, Phys. Lett., **57B**, 248 (1976).
147. *Deser S.*, *Duff M. J.*, *Isham C. J.*, Nucl. Phys., **B111**, 45 (1976).
148. *Deser S.*, *Zumino B.*, Phys. Lett., **62B**, 335 (1976).
149. *de Sitter W.*, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet., **19**, 1217 (1917).
150. *de Sitter W.*, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet., **20**, 229 (1917).
151. *Deutsch D.*, *Candelas P.*, Phys. Rev. D, **20**, 3063 (1979).
152. *DeWitt B. S.*, Phys. Rev., **90**, 357 (1953).
153. *DeWitt B. S.*, The dynamical theory of groups and fields в книге: Relativity, groups and Topology, eds. B. S. DeWitt, C. DeWitt, New York: Gordon and Breach, 1965.
154. *DeWitt B. S.*, Phys. Rev., **160**, 1113 (1967).
155. *DeWitt B. S.*, Phys. Rev., **162**, 1195, 1239 (1967).
156. *DeWitt B. S.*, Phys. Rep., **19C**, 297 (1975).
157. *DeWitt B. S.*, в книге: General Relativity, eds. S. W. Hawking, W. Israel, Cambridge: Cambridge University Press, 1979.
158. *DeWitt B. S.*, *Brehme R. W.*, Ann. Phys. (USA), **9**, 220 (1960).
159. *DeWitt B. S.*, *Hart C. F.*, *Isham C. J.* в книге: Themes in Contemporary Physics, ed. S. Deser, Amsterdam: North-Holland, 1960.
160. *Dirac P. A. M.*, Proc. Roy. Soc. London, **A155**, 447 (1936).
161. *di Sessa A.*, Journ. Math. Phys. (USA), **15**, 1892 (1974).
162. *Dolan L.*, *Jackiw R.*, Phys. Rev. D, **9**, 3320 (1974).
163. Долгинов А. З., Топтыгин И. Н. — ЖЭТФ, 1959, т. 37, с. 141.
164. *Domokos G.*, *Janson M. M.*, *Kovesi-Domokos S.*, Nature (London), **257**, 203 (1975).
165. *Dowker J. S.*, Proc. Roy. Soc. London, **A297**, 351 (1967).
166. *Dowker J. S.*, Supp. Nuovo Cimento, **5**, 734 (1967).
167. *Dowker J. S.*, Ann. Phys. (USA), **62**, 361 (1971).
168. *Dowker J. S.*, Ann. Phys. (USA), **71**, 577 (1972).
169. *Dowker J. S.*, Journ. Phys. A: Gen. Phys., **10**, 115 (1977).
170. *Dowker J. S.*, *Banach R.*, Journ. Phys. A: Gen. Phys., **11**, 2255 (1978).
171. *Dowker J. S.*, *Critchley R.*, Phys. Rev. D, **13**, 224 (1976).
172. *Dowker J. S.*, *Critchley R.*, Phys. Rev. D, **13**, 3224 (1976).
173. *Dowker J. S.*, *Critchley R.*, Journ. Phys. A: Gen. Phys., **9**, 535 (1976).
174. *Dowker J. S.*, *Critchley R.*, Phys. Rev. D, **15**, 1484 (1977).
175. *Dowker J. S.*, *Critchley R.*, Phys. Rev. D, **16**, 3390 (1977).
176. *Dowker J. S.*, *Dowker Y. P.*, Proc. Roy. Soc. London, **A294**, 175 (1966).
177. *Dowker J. S.*, *Dowker Y. P.*, Proc. Roy. Soc. London, **87**, 65 (1966).
178. *Dowker J. S.*, *Kennedy G.*, Journ. Phys. A: Gen. Phys., **11**, 895 (1978).
179. *Dreitlein J.*, Phys. Rev. Lett., **33**, 1243 (1974).
180. *Drummond I. T.*, *Hathrell S. J.*, Phys. Rev. D, **21**, 958 (1980).
181. *Drummond I. T.*, *Shore G. M.*, Phys. Rev. D, **19**, 1134 (1979).

182. Дуан И. С. — ЖЭТФ, 1956, т. 31, с. 1098.
183. Dubin D. A., Ann. Phys. (USA), **102**, 71 (1976).
184. Duff M. J. в книге: Quantum Gravity: An Oxford Symposium, eds. C. J. Isham, R. Penrose, D. W. Sciama, Oxford: Clarendon, 1975.
185. Duff M. J., Nucl. Phys., **B125**, 334 (1977).
186. Duff M. J. в книге: Quantum Gravity II: A Second Oxford Symposium, eds. C. J. Isham, R. Penrose, D. W. Sciama, Oxford: Clarendon, 1981.
187. Dyson F. J., Phys. Rev., **75**, 486, 1736 (1949).
188. Einstein A., Sitz. Preuss. Akad. Wiss., 142 (1917).
189. Epstein H., Gaser V., Jaffe A., Nuovo Cimento, **36**, 1016 (1965).
190. Fadeev L. D., Popov V. N., Phys. Lett., **25B**, 29 (1967).
191. Farrugia C. J., Hájíček P., Commun. Math. Phys., **68**, 291 (1980).
192. Fetter A. L., Walecka J. D., Quantum Theory of Many-Particle Systems, New York: McGraw-Hill, 1971.
193. Feynman R. P., Acta Phys. Pol. **24**, 697 (1963).
194. Feynman R. P., Hibbs A. R., Quantum Mechanics and Path Integrals, New York: McGraw-Hill, 1965. [Имеется перевод. Фейнман Р. П., Хиббс Д. Р. Квантовая механика и интегралы по траекториям. — М.: Мир, 1968.]
195. Fierz M., Helv. Phys. Acta, **12**, 3 (1939).
196. Fierz M., Pauli W., Proc. Roy. Soc. London, **A173**, 211 (1939).
197. Fischetti M. V., Hartle J. B., Hu B. L., Phys. Rev. D, **20**, 1757 (1979).
198. Fock V. A., Zs. Phys., **57**, 261 (1929).
199. Fock V. A., Phys. Zs. Sow. **12**, 404 (1937).
200. Fock V. A., Ivanenko D., Zs. Phys., **54**, 798 (1929).
201. Ford L. H., Phys. Rev. D, **12**, 2963 (1975).
202. Ford L. H., Phys. Rev. D, **14**, 3304 (1976).
203. Ford L. H., Proc. Roy. Soc. London **A364**, 227 (1978).
204. Ford L. H., Proc. Roy. Soc. London, **A368**, 305 (1979).
205. Ford L. H., Phys. Rev. D, **21**, 933 (1980).
206. Ford L. H., Phys. Rev. D, **22**, 3003 (1980).
207. Ford L. H., Parker L., Phys. Rev. D, **16**, 245 (1977).
208. Ford L. H., Parker L., Phys. Rev. D, **17**, 1485 (1978).
209. Ford L. H., Yoshimura T., Phys. Lett., **70A**, 89 (1979).
210. Fradkin E. S., Vilkovisky G. S., Phys. Lett., **73B**, 209 (1978).
211. Frampton P. H., Lectures on Gauge Field Theories. Part Two: Quantization, University of California at Los Angeles publication UCLA/77/TEP/21, 1977.
212. Freedman D. Z., Muzinich I. J., Weinberg E. J., Ann. Phys. (USA), **87**, 95 (1974).
213. Freedman D. Z., Pi S.-Y., Ann. Phys. (USA) **91**, 442 (1975).
214. Freedman D. Z., van Nieuwenhuizen P., Ferrara S., Phys. Rev. D, **13**, 3214 (1976).
215. Freedman D. Z., Weinberg E. J., Ann. Phys. (USA) **87**, 354 (1974).
216. Friedlander F. G., The Wave Equation в книге: Curved Space-Time, Cambridge: Cambridge University Press, 1975.
217. Фролов В. М., Гриб А. А., Мостепаненко В. М. — ТМФ, 1977, т. 33, с. 42.
218. Frolov V. M., Grib A. A., Mostepanenko V. M., Phys. Lett., **65A**, 282 (1978).
219. Frolov V. M., Mamaev S. G., Mostepanenko V. M., Phys. Lett., **55A**, 389 (1976).
220. Fulling S. A., Ph. D. Thesis, Princeton University, 1972.
221. Fulling S. A., Phys. Rev. D, **7**, 2850 (1973).
222. Fulling S. A., Journ. Phys. A: Gen. Phys., **10**, 917 (1977).
223. Fulling S. A., Gen. Relativ. Gravit. **10**, 807 (1979).
224. Fulling S. A., Davies P. C. W., Proc. Roy. Soc. London, **A348**, 393 (1976).
225. Fulling S. A., Parker L., Hu B. L., Phys. Rev. D, **10**, 3905; erratum ibid **11**, 1714 (1974).

226. Fulling S. A., Sweeny M., Wald R. M., Commun. Math. Phys. **63**, 257 (1978).
227. Garabedian P. R., Partial Differential Equations, New York: Wiley, 1964.
228. Georgi H., Glashow S. L., Phys. Rev. Lett., **32**, 438 (1974).
229. Gerlach U., Phys. Rev. D, **14**, 1479 (1976).
230. Gibbons G. W., Commun. Math. Phys., **44**, 245 (1975).
231. Gibbons G. W., Phys. Lett., **60A**, 385 (1977).
232. Gibbons G. W., Phys. Lett., **61A**, 3 (1977).
233. Gibbons G. W., Journ. Phys. A: Gen. Phys., **11**, 1341 (1978).
234. Gibbons G. W. в книге: General Relativity: An Einstein Centenary Survey, eds. S. W. Hawking, W. Israel, Cambridge: Cambridge University Press, 1979.
235. Gibbons G. W., Ann. Phys. (USA), **125**, 98 (1980).
236. Gibbons G. W., Hawking S. W., Phys. Rev. D, **15**, 2738 (1977).
237. Gibbons G. W., Hawking S. W., Phys. Rev. D, **15**, 2752 (1977).
238. Gibbons G. W., Hawking S. W., Commun. Math. Phys., **66**, 291 (1979).
239. Gibbons G. W., Perry M. J., Phys. Rev. Lett., **36**, 985 (1976).
240. Gibbons G. W., Perry M. J., Proc. Roy. Soc. London, **A358**, 467 (1978).
241. Gibbons G. W., Pope C. N., Commun. Math. Phys., **61**, 239 (1978).
242. Gilkey P. B., Adv. Math., **15**, 334 (1975).
243. Ginnibre J. в книге: Statistical Mechanics and Quantum Field Theory, eds. C. DeWitt, R. Stora, New York: Gordon and Breach, 1971.
244. Гинзбург В. Л., Киржниц Д. А., Любушин А. А. — ЖЭТФ, 1971, т. 60, с. 451.
245. Gitman D. M., Journ. Phys. A: Gen. Phys., **10**, 2007 (1977).
246. Goldstone J., Nuovo Cimento, **19**, 154 (1961).
247. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.
248. Greiner P., Archs. Ration. Mech. Analysis, **41**, 163 (1971).
249. Grensing G., Journ. Phys. A: Gen. Phys., **10**, 1687 (1977).
250. Гриб А. А., Мамаев С. Г. — Ядерная физика, 1969, т. 10, с. 1276.
251. Гриб А. А., Мамаев С. Г. — Ядерная физика, 1971, т. 14, с. 800.
252. Grib A. A., Mamaev S. G., Mostepanenko V. M., Gen. Relativ. Gravit., **7**, 535 (1976).
253. Grib A. A., Mamaev S. G., Mostepanenko V. M., Journ. Phys. A: Gen. Phys., **13**, 2057 (1980).
254. Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М. — Квантовые эффекты в сильных внешних полях. — М.: Атомиздат, 1980.
255. Гришук Л. П. — ЖЭТФ, 1974, т. 67, с. 825.
256. Grishchuk L. P., Lett. Nuovo Cimento, **12**, 60 (1975).
257. Grishchuk L. P., Graviton creation in the early universe в книге: Eighth Texas Symposium on Relativistic Astrophysics, ed. M. D. Papagiannis, New York: New York Academy of Sciences, 1977.
258. Gupta S. N., Proc. Phys. Soc. (London), **A63**, 681 (1950).
259. Gürsey F., Introduction to group theory в книге: Relativity, Groups and Topology, eds. B. S. DeWitt, C. DeWitt, New York: Cordon and Breach, 1964.
260. Gutzwiller M., Helv. Phys. Acta, **29**, 313 (1956).
261. Haag R., Kgl. Danske Videnskab Selskab, Mat.-Fys. Medd., **29**, No. 12 (1955).
262. Hadamard J., Lectures on Cauchy's Problem в книге: Linear Partial Differential Equations, New Haven: Yale University Press, 1923.
263. Hagedorn R., Supp. Nuovo Cimento, **3**, 147 (1965).
264. Hájíček P., Nuovo Cimento, **33B**, 597 (1976).
265. Hájíček P., Phys. Rev. D, **15**, 2757 (1977).
266. Hájíček P., Israel W., Phys. Lett., **80A**, 9 (1980).
267. Halpern L., Ark. Eys., **34**, 539 (1967).

268. *Hartle J. P.*, Phys. Rev. Lett., **39**, 1373 (1977).
269. *Hartle J. B.* в книге: Quantum Gravity II: A Second Oxford Symposium, eds. C. J. Isham, R. Penrose, D. W. Sciama, Oxford: Clarendon, 1981.
270. *Hartle J. B.*, *Hawking S. W.*, Phys. Rev. D, **13**, 2188 (1976).
271. *Hartle J. B.*, *Hu B. L.*, Phys. Rev. D, **20**, 1772 (1979).
272. *Hartle J. B.*, *Hu B. L.*, Phys. Rev. D, **21**, 2756 (1981).
273. *Hatakar M. M.*, Phys. Rev., **94**, 1472 (1954).
274. *Hawking S. W.*, Commun. Math. Phys., **18**, 301 (1970).
275. *Hawking S. W.*, Commun. Math. Phys., **25**, 152 (1972).
276. *Hawking S. W.*, 'The event horizon' в книге: Black Holes, eds. C. DeWitt, B. S. DeWitt, New York: Gordon and Breach, 1973.
277. *Hawking S. W.*, Nature (London), **248**, 30 (1974).
278. *Hawking S. W.*, Commun. Math. Phys., **43**, 199 (1975).
279. *Hawking S. W.*, Phys. Rev. D, **13**, 191 (1976).
280. *Hawking S. W.*, Phys. Rev. D, **14**, 2460 (1976).
281. *Hawking S. W.*, Commun. Math. Phys., **55**, 133 (1977).
282. *Hawking S. W.*, Sci. Am., **236**, 34 (1977).
283. *Hawking S. W.*, Phys. Lett., **60A**, 81 (1977).
284. *Hawking S. W.*, Phys. Rev. D, **18**, 1747 (1978).
285. *Hawking S. W.*, The path-integral approach to quantum gravity в книге: General Relativity: An Einstein Centenary Survey, eds. S. W. Hawking, W. Israel, Cambridge: Cambridge University Press, 1979.
286. *Hawking S. W.*, Acausal propagation in quantum gravity в книге: Quantum Gravity II: A Second Oxford Symposium, eds. C. J. Isham, R. Penrose, D. W. Sciama, Oxford: Clarendon, 1981.
287. *Hawking S. W.*, *Ellis G. F. R.*, The Large Scale Structure of Space-Time, Cambridge: Cambridge University Press, 1973. [Имеется перевод: Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. — М.: Мир, 1977.]
288. *Hawking S. W.*, *Penrose R.*, Proc. Roy. Soc. London, **A314**, 529 (1970).
289. *Hiscock W. A.*, Phys. Rev. D, **15**, 3054 (1977).
290. *Hiscock W. A.*, Phys. Rev. D, **16**, 2673 (1977).
291. *Hiscock W. A.*, Ph. D. Thesis, University of Maryland, 1979.
292. *Hiscock W. A.*, Phys. Rev. D, **21**, 2063 (1980).
293. *Horibe M.*, Prog. Theor. Phys., **61**, 661 (1979).
294. *Horowitz G. T.*, Phys. Rev. D, **21**, 1445 (1980).
295. *Horowitz G. T.*, *Wald R. M.*, Phys. Rev. D, **17**, 414 (1978).
296. *Horowitz G. T.*, *Wald R. M.*, Phys. Rev. D, **21**, 1462 (1980).
297. *Hosoya A.*, Prog. Theor. Phys., **61**, 280 (1979).
298. *Hoyle F.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **108**, 372 (1948).
299. *Hu B. L.*, Ph. D. Thesis, Princeton University 1972.
300. *Hu B. L.*, Phys. Rev. D, **8**, 1048 (1973).
301. *Hu B. L.*, Phys. Rev. D, **9**, 3263 (1974).
302. *Hu B. L.*, Phys. Rev. D, **18**, 4460 (1978).
303. *Hu B. L.*, Phys. Lett., **71A**, 169 (1979).
304. *Hu B. L.*, Quantum field theories and relativistic cosmology в книге: Recent Developments in General Relativity, ed. R. Ruffini, Amsterdam: North-Holland, 1980.
305. *Hu B. L.*, *Fulling S. A.*, *Parker L.*, Phys. Rev. D, **8**, 2377 (1973).
306. *Hu B. L.*, *Parker L.*, Phys. Rev. D, **17**, 933 (1978).
307. *Hut P.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **180**, 379 (1977).
308. *Imamura T.*, Phys. Rev., **118**, 1430 (1960).
309. *Isham C. J.*, An introduction to quantum gravity в книге: Quantum Gravity: An Oxford Symposium, eds. C. J. Isham, R. Penrose, D. W. Sciama, Oxford: Clarendon, 1975.
310. *Isham C. J.*, Quantum field theory in a curved spacetime — a general mathematical framework в книге: Proceedings of the Bonn Conference on

- Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics, eds. K. Bleuler, H. R. Petry, A. Reetz, New York: Springer-Verlag, 1978.
311. *Isham C. J.*, Proc. Roy. Soc. London, **A362**, 383 (1978).
 312. *Isham C. J.*, Proc. Roy. Soc. London, **A364**, 591 (1978).
 313. *Isham C. J.*, Proc. Roy. Soc. London, **A368**, 33 (1979).
 314. *Isham C. J.*, Quantum gravity — an overview в книге: Quantum Gravity II: A Second Oxford Symposium, eds. C. J. Isham, R. Penrose, D. W. Sciama, Oxford: Clarendon, 1981.
 315. *Isihara A.*, Statistical Physics, New York: Academic Press, 1971.
 316. *Israel W.*, Phys. Lett., **57A**, 107 (1976).
 317. *Itzykson C., Zuber J.-C.*, Quantum Field Theory, New York: McGraw-Hill, 1980.
 318. *Jauch J. M., Rohrlich F.*, The Theory of Photons and Electrons, Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1955.
 319. *Kadanoff L. P., Baym G.*, Quantum Statistical Mechanics, Menlo Park, California: Benjamin, 1962.
 320. *Kay B. S.*, Phys. Rev. D, **20**, 3052 (1979).
 321. *Kay B. S.*, Commun. Math. Phys., **71**, 29 (1980).
 322. *Kennedy G.*, Journ. Phys. A: Gen. Phys., **11**, L173 (1978)..
 323. *Kennedy G., Critchley R., Dowker J. S.*, Ann. Phys. (USA), **125**, 346 (1980).
 324. *Kennedy G., Unwin S. D.*, Journ. Phys. A: Gen. Phys., **13**, L253 (1980).
 325. *Kibble T. W. B.*, Commun. Math. Phys., **64**, 73 (1978).
 326. *Kibble T. W. B., Randjbar-Daemi S.*, Journ. Phys. A: Gen. Phys., **13**, 141 (1980).
 327. *Kirzhnits D. A., Linde A. D.*, Phys. Lett., **42B**, 471 (1972).
 328. *Kirzhnits D. A., Linde A. D.*, Ann. Phys. (USA), **101**, 195 (1976).
 329. *Kislinger M. B., Morley P. D.*, Phys. Rev. D, **13**, 2771 (1976).
 330. *Klaiber B.* в книге: Lectures in Theoretical Physics, Vol. XA, eds. A. O. Barut, W. E. Britten, New York: Gordon and Breach, 1968.
 331. *Klein O.*, Zs. Phys., **53**, 157 (1929).
 332. *Kobsarev I. Yu., Okun L. B., Zel'dovich Ya. B.*, Phys. Lett., **50B**, 340 (1974).
 333. *Kreyszig E.*, Introduction to Differential Geometry and Riemannian Geometry, Toronto: University of Toronto Press, 1968.
 334. *Kruskal M. D.*, Phys. Rev., **119**, 1743 (1960).
 335. *Landau L. D., Lifshitz E. M.*, Statistical Physics, London: Pergamon, 1958.
 336. *Lapedes A. S.*, Phys. Rev. D, **17**, 2556 (1978).
 337. *Lapedes A. S.*, Journ. Math. Phys. (USA), **19**, 2289 (1978).
 338. *Lehmann H., Symanzik K., Zimmermann W.*, Nuovo Cimento, **1**, 1425 (1955).
 339. *Лифшиц Е. М.* — ЖЭТФ, 1955, т. 29, с. 94.
 340. *Lifshitz E. M., Khalatnikov I. M.*, Adv. Phys., **12**, 185 (1963).
 341. *Liouville J.*, Journal de Math., **2**, 24 (1837).
 342. *Lohiya D., Panchapakesan N.*, Journ. Phys. A: Gen. Phys., **11**, 1963 (1978).
 343. *Lohiya D., Panchapakesan N.*, Journ. Phys. A: Gen. Phys., **12**, 523 (1979).
 344. *Lotze K.-H.*, Acta Phys. Pol., **B9**, 665, 677 (1978).
 345. *Лукаш В. Н., Новиков И. Д., Старобинский А. А.* — ЖЭТФ, 1975, т. 69, с. 1484.
 346. *Lukash V. N., Novikov I. D., Starobinsky A. A., Zel'dovich Ya. B.*, Nuovo Cimento, **35B**, 293 (1976).
 347. *Лукаш В. Н., Старобинский А. А.* — ЖЭТФ, 1974, т. 66, с. 515.
 348. *Lynden-Bell D., Wood R.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **136**, 107 (1967).
 349. *MacCallum M. A. H.*, Anisotropic and inhomogenous relativistic cosmologies в книге: General Relativity: An Einstein Centenary Survey, eds. S. W. Hawking, W. Israel, Cambridge: Cambridge University Press, 1979.

350. *Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М., Старобинский А. А.* — ЖЭТФ, 1976, т. 70, с. 1577.
351. *Manoukian E. B.*, Nuovo Cimento, **53A**, 345 (1979).
352. *Martellini M., Sodano P., Vitiello G.*, Nuovo Cimento, **48A**, 341 (1978).
353. *Mashhoon B.*, Phys. Rev. D, **8**, 4297 (1973).
354. *Mattuck R. D.*, A Guide to Feynman Diagrams in the Many-Body Problem, London: McGraw-Hill, 1967.
355. *McKean H. P., Singer I. M.*, Journ. Diff. Geom., **1**, 43 (1967).
356. *McNamara J. M.*, Proc. Roy. Soc. London, **A358**, 499 (1978).
357. *Meikle W. P. S.*, Nature (London), **269**, 41 (1977).
358. *Melnikov V. N., Orlov S. V.*, Phys. Lett., **70A**, 263 (1979).
359. *Milne E. A.*, Nature (London), **130**, 9 (1932).
360. *Minakshisundaram S., Pleijel A.*, Can. Journ. Math., **1**, 242 (1949).
361. *Misner C. W.*, Astrophys. Journ. **151**, 431 (1968).
362. *Misner C. W.*, Phys. Rev. Lett., **28**, 994 (1972).
363. *Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A.*, Gravitation, San Francisco: Freeman, 1973. [Имеется перевод: Мизнер Ч. В., Торн К. С., Уилер Дж. А. Гравитация, т. I—III. — М.: Мир, 1977.]
364. *Mohan G.* в книге: Lectures in Theoretical Physics, Vol. XB, eds. A. O. Barut, W. E. Britten, New York: Gordon and Breach, 1968.
365. *Moore G. T.*, Journ. Math. Phys. (USA), **9**, 2679 (1970).
366. *Nambu Y.*, Prog. Theor. Phys., **5**, 82 (1950).
367. *Nambu Y.*, Phys. Lett., **26B**, 626 (1966).
368. *Nariai H.*, Prog. Theor. Phys., **46**, 433, 776 (1971).
369. *Nariai H.*, Nuovo Cimento, **35B**, 259 (1976).
370. *Nariai H.*, Prog. Theor. Phys., **57**, 67 (1977).
371. *Nariai H.*, Prog. Theor. Phys., **58**, 560 (1977).
372. *Nariai H.*, Prog. Theor. Phys., **58**, 842 (1977).
373. *Nash C.*, Relativistic Quantum Fields, London: Academic Press, 1978.
374. *Omero C., Percacci R.*, Nucl. Phys., **B165**, 351 (1980).
375. *Page D. N.*, Phys. Rev. D, **13**, 198 (1976).
376. *Page D. N.*, Phys. Rev. D, **14**, 3260 (1976).
377. *Page D. N.*, Phys. Rev. D, **16**, 2402 (1977).
378. *Page D. N.*, Phys. Rev. Lett., **44**, 301 (1980).
379. *Parker L.*, The Creation of Particles in an Expanding Universe, Ph. D. Thesis, Harvard University (available from: University Microfilms Library Service, Xerox Corp., Ann. Arbor, Michigan, USA), 1966.
380. *Parker L.*, Phys. Rev. Lett., **21**, 562 (1968).
381. *Parker L.*, Phys. Rev. **183**, 1057 (1969).
382. *Parker L.*, Phys. Rev. D, **3**, 346 (1971).
383. *Parker L.*, Phys. Rev. D., **5**, 2905 (1972).
384. *Parker L.*, Phys. Rev. D, **7**, 976 (1973).
385. *Parker L.*, Phys. Rev. D, **12**, 1519 (1975).
386. *Parker L.*, Nature (London), **261**, 20 (1976).
387. *Parker L.*, The production of elementary particles by strong gravitational fields в книге: Asymptotic Structure of Space-Time, eds. F. P. Esposito, L. Witten, New York: Plenum, 1977.
388. *Parker L.*, Aspects of quantum field theory in curved spacetime: effective-action and energy — momentum tensor в книге: Recent Developments in Gravitation, eds. S. Deser, M. Levy, New York: Plenum, 1979.
389. *Parker L., Fulling S. A.*, Phys. Rev. D, **7**, 2357 (1973).
390. *Parker L., Fulling S. A.*, Phys. Rev. D, **9**, 341 (1974).
391. *Parker L., Fulling S. A., Hu B. L.*, Phys. Rev. D, **10**, 3905 (1974).
392. *Parnovsky S. L.*, Phys. Lett., **73A**, 153 (1979).
393. *Pauli W., Villars F.*, Rev. Mod. Phys., **21**, 434 (1949).
394. *Penrose R.*, Conformal treatment of infinity в книге: Relativity, Groups and Topology, eds. B. S. DeWitt, C. DeWitt, New York: Gordon and

- Breach, 1964. [Имеется перевод: В сб.: Гравитация и топология, под ред. Д. Д. Иваненко. — М.: Мир, 1966, с. 152.]
395. Penrose R., Proc. Roy. Soc. London, **A284**, 159 (1965).
396. Penrose R., Riv. Nuovo Cimento, **1**, 252 (1969).
397. Penrose R., Singularities and time-asymmetry в книге: General Relativity: An Einstein Centenary Survey, eds. S. W. Hawking, W. Israel, Cambridge: Cambridge University Press, 1979.
398. Петров А. З. Пространства Эйнштейна. — М.: ГИФМЛ, 1961.
399. Planck M. K. E. L., Sitz. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math.-Phys. Tech., **440** (1899).
400. Press W. H., Teukolsky S. A., Nature (London), **238**, 211 (1972).
401. Raine D. J., Winlove C. P., Phys. Rev. D, **12**, 946 (1975).
402. Randjbar-Daemi S., Kay B. S., Kibble T. W. B., Phys. Lett., **91B**, 417 (1980).
403. Rees M. J., Nature (London), **266**, 333 (1977).
404. Rindler W., Am. Journ. Phys., **34**, 1174 (1966). Many features of this work were anticipated in a paper by Max Born, Ann. Phys. (Leipzig), **30**, 1 (1909).
405. Rindler W., Essential Relativity, New York: Van Nostrand, 1969.
406. Roman P., Introduction to Quantum Field Theory, New York: Wiley, 1969.
407. Rowan D. J., Stephenson G., Journ. Phys. A: Gen. Phys., **9**, 1631 (1976).
408. Rumpf H., Phys. Lett., **61B**, 272 (1976).
409. Rumpf H., Nuovo Cimento, **35B**, 321 (1976).
410. Рузмайкина Т. В., Рузмайкин А. А. — ЖЭТФ, 1970, т. 57, с. 680.
411. Rzewuski J., Field Theory, Vol. II, London: Iliffe Books, 1969.
412. Сахаров А. Д. — ДАН СССР, 1967, т. 177, с. 70.
413. Salam A., Weak and electromagnetic interactions в книге: Elementary Particle Theory, ed. N. Svartholm, Stockholm: Almquist, Forlag AB, p. 367, 1963.
414. Sanchez N., Phys. Lett., **87B**, 212 (1979).
415. Scarf F. L., A soluble quantum field theory in curved space в книге: Les Théories Relativistes de la Gravitation, Paris: Centre National de Recherche Scientifique, 1962.
416. Schäfer G., Journ. Phys. A: Gen. Phys., **11**, L179 (1978).
417. Schäfer G., Dehnen H., Astron. Astrophys., **54**, 823 (1977).
418. Schiff L. I., Quantum Mechanics, New York: McGraw-Hill, 1949. [Имеется перевод: Шифф Л. И. Квантовая механика. — М.: ИЛ, 1959.]
419. Schombond C., Spindel P., Ann. Inst. Henri Poincaré, **25A**, 67 (1976).
420. Schrödinger E., Sitz. Preuss. Akad. Wiss., 105 (1932).
421. Schrödinger E., Physica (Utrecht), **6**, 899 (1939).
422. Schrödinger E., Expanding Universes, Cambridge: Cambridge University Press, 1956.
423. Schweber S., An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory, New York: Harper and Row, 1961. [Имеется перевод: Швебер С. Введение в квантовую теорию поля. — М.: ИЛ, 1963.]
424. Schwinger J., Phys. Rev., **74**, 1439 (1948).
425. Schwinger J., Phys. Rev., **75**, 651 (1949).
426. Schwinger J., Phys. Rev., **76**, 790 (1949).
427. Schwinger J., Phys. Rev., **82**, 664 (1951).
428. Schwinger J., Proc. Nat. Acad. Sci. (USA), **37**, 452 (1951).
429. Sciamia D. W., Vistas in Astron., **19**, 385 (1976).
430. Segal I. E. в книге: Applications of Mathematics to Problems in Theoretical Physics, ed. F. Luciat, New York: Gordon and Breach, 1967. [Имеется перевод: Сигал И. Е. Математические проблемы релятивистской физики. — М.: Мир, 1968.]
431. Sexl R. U., Urbanke H. K., Acta Phys. Austriaca, **26**, 339 (1967).
432. Sexl R. U., Urbanke H. K., Phys. Rev., **179**, 1247 (1969).

433. Shannon C., Weaver W., The Mathematical Theory of Communication, Urbana: University of Illinois Press, 1949.
434. Shore G. M., Phys. Rev. D, **21**, 2226 (1980).
435. Shore G. M., An. Phys. (USA), **128**, 376 (1980).
436. Simpson M., Penrose R., Int. Journ. Theor. Phys., **7**, 183 (1973).
437. Sommerfield C. M., Ann. Phys. (USA), **84**, 285 (1974).
438. Sparnaay M. J., Physica (Utrecht), **24**, 751 (1958).
439. Старобинский А. А. — ЖЭТФ, 1973, т. 64, с. 48.
440. Starobinsky A. A., Phys. Lett., **91B**, 99 (1980).
441. Старобинский А. А., Чурилов С. М. — ЖЭТФ, 1973, т. 65, с. 3.
442. Stelle K. S., Phys. Rev. D, **16**, 953 (1977).
443. Stelle K. S., Gen. Relativ. Gravit., **9**, 353 (1978).
444. Stewartson K., Waechter R. T., Proc. Camb. Phil. Soc., **69**, 353 (1971).
445. Symanzik K., Commun. Math. Phys., **18**, 48 (1970).
446. Synge J. L., Relativity: The General Theory, Amsterdam: North-Holland, 1960. [Имеется перевод: Синг Дж. Л. Общая теория относительности. — М.: ИЛ, 1962.]
447. Tabor D., Winterton R. H. S., Proc. Roy. Soc. London, **A312**, 435 (1969).
448. Tagirov E. A., Ann. Phys. (USA), **76**, 561 (1973).
449. Takahashi Y., Umezawa H., Nuovo Cimento, **6**, 1324 (1957).
450. Taylor J. C., Nuovo Cimento, **17**, 695 (1960).
451. Taylor J. C., Supp. Nuovo Cimento, **1**, 857 (933).
452. Taylor J. C., Gauge Theories of Weak Interactions, Cambridge: Cambridge University Press, 1976.
453. Teukolsky S. A., Astrophys. Journ., **185**, 635 (1973).
454. Teukolsky S. A., Press W. H., Astrophys. Journ., **193**, 443 (1974).
455. Thirring W. E., Ann. Phys. (USA), **3**, 91 (1958).
456. Thirring W. E., Nuovo Cimento, **9**, 1007 (1958).
457. 't Hooft G., Nucl. Phys., **B61**, 455 (1973).
458. 't Hooft G., Veltman M., Nucl. Phys., **B44**, 189 (1972).
459. Tipler F., Phys. Rev. Lett., **45**, 949 (1980).
460. Tolman R. C., Relativity, Thermodynamics, and Cosmology, Oxford: Clarendon, 1934.
461. Tomonaga S., Prog. Theor. Phys., **1**, 27 (1946).
462. Toms D. J., Phys. Rev. D, **21**, 928 (1980).
463. Toms D. J., Phys. Rev. D, **21**, 2805 (1980).
464. Toms D. J., Ann. Phys. (USA), **129**, 334 (1980).
465. Toms D. J., Phys. Lett., **77A**, 303 (1980).
466. Troost W., van Dam H., Phys. Lett., **71B**, 149 (1977).
467. Unruh W. G., Phys. Rev. D, **10**, 3194 (1974).
468. Unruh W. G., Phys. Rev. D, **14**, 870 (1976).
469. Urbanke H. K., Nuovo Cimento, **63B**, 203 (1969).
470. Utiyama R., Phys. Rev., **125**, 1727 (1962).
471. Utiyama R., DeWitt B. S., Journ. Math. Phys. (USA), **3**, 608 (1962).
472. Valatin J. G., Proc. Roy. Soc. London, **A222**, 93 (1954).
473. Valatin J. G., Proc. Roy. Soc. London **A222**, 228 (1954).
474. Valatin J. G., Proc. Roy. Soc. London, **A225**, 535 (1954).
475. van Nieuwenhuizen P., Freedman D. Z. (eds.), Supergravity, Amsterdam: North-Holland, 1979.
476. Van Vleck, Proc. Nat. Acad. Sci. (USA), **14**, 178 (1928).
477. Vilenkin A., Nuovo Cimento, **44A**, 441 (1978).
478. Волович И. В., Загребнов В. А., Фролов В. П. — ТМФ, 1977, т. 33, с. 3.
479. Waechter R. T., Proc. Camb. Phil. Soc., **72**, 439 (1972).
480. Wald R. M., Commun. Math. Phys., **45**, 9 (1975).
481. Wald R. M., Phys. Rev. D, **13**, 3176 (1976).
482. Wald R. M., Commun. Math. Phys., **54**, 1 (1977).
483. Wald R. M., Phys. Rev. D, **17**, 1477 (1978).

484. Wald R. M., Ann. Phys. (USA), **110**, 472 (1978).
485. Wald R. M., Ann. Phys. (USA), **118**, 490 (1979).
486. Wald R. M., Commun. Math. Phys., **70**, 221 (1979).
487. Wald R. M., Phys. Rev. D, **21**, 2742 (1980).
488. Wald R. M., Ramaswamy S., Phys. Rev. D, **21**, 2736 (1980).
489. Wehrl A., Rev. Mod. Phys. **50**, 221 (1978).
490. Weinberg S., Phys. Rev., **133**, B1318 (1964).
491. Weinberg S., Phys. Rev., **134**, B882 (1964).
492. Weinberg S., The quantum theory of massless particles в книге: Lectures on Particles and Field Theory. Vol. II, eds. K. A. Johnson and others, Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1964.
493. Weinberg S., Phys. Rev. Lett., **19**, 1264 (1967).
494. Weinberg S., Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity. New York: Wiley, 1972. [Имеется перевод: Вейнберг С. Гравитация и космология. — М.: Мир, 1975.]
495. Weinberg S., Phys. Rev. D, **9**, 3357 (1974).
496. Wichmann E. H., Selected Topics in the Theory of Particles and Fields. Copenhagen: Nordita, 1962.
497. Wick G. C., Phys. Rev., **80**, 268 (1950).
498. Зельдович Я. Б. — Письма в ЖЭТФ, 1970, т. 12, с. 443.
499. Зельдович Я. Б. — Письма в ЖЭТФ, 1971, т. 14, с. 270.
500. Зельдович Я. Б. — ЖЭТФ, 1972, т. 62, с. 2076.
501. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Старобинский А. А. — ЖЭТФ, 1974, т. 66, с. 1897.
502. Zel'dovich Ya. B., Pitaevsky L. P., Commun. Math. Phys., **23**, 185 (1971).
503. Зельдович Я. Б., Старобинский А. А. — ЖЭТФ, 1971, т. 61, с. 2161.
504. Зельдович Я. Б., Старобинский А. А. — Письма в ЖЭТФ, 1977, т. 26, с. 373.
505. Zurek W. H., Phys. Lett., **77A**, 399 (1980).

КОНФОРМНЫЕ АНОМАЛИИ

506. Adler S. L., Lieberman J., Ng Y. J., Ann. Phys. (USA), **106**, 279 (1977).
507. Bernard C., Duncan A., Ann. Phys. (USA), **107**, 201 (1977).
508. Brown L. S., Phys. Rev. D, **15**, 1469 (1977).
509. Brown L. S., Cassidy J. P., Phys. Rev. D, **15**, 2810 (1977).
510. Brown L. S., Cassidy J. P., Phys. Rev. D, **16**, 1712 (1977).
511. Bunch T. S., Journ. Phys., **A11**, 603 (1978).
512. Bunch T. S., Journ. Phys., **A12**, 517 (1979).
513. Capper D. M., Duff M. J., Nuovo Cimento, **A23**, 173 (1974).
514. Capper D. M., Duff M. J., Phys. Lett., **53A**, 361 (1975).
515. Christensen S. M., Phys. Rev. D, **14**, 2490 (1976).
516. Christensen S. M., Phys. Rev. D, **17**, 946 (1978).
517. Christensen S. M., Duff M. J., Phys. Lett., **76B**, 571 (1978).
518. Christensen S. M., Duff M. J., Nucl. Phys., **B146**, 11 (1978).
519. Christensen S. M., Fulling S. A., Phys. Rev., D, **15**, 2088 (1977).
520. Critchley R., Phys. Rev. D, **18**, 1849 (1978).
521. Critchley R., Phys. Lett., **78B**, 410 (1978).
522. Davies P. C. W., Stress tensor calculations and conformal anomalies в книге: Eighth Texas Symposium on Relativistic Astrophysics, ed. M. D. Papagiannis, New York: New York Academy of Sciences, 1977.
523. Davies P. C. W., Fulling S. A., Proc. Roy. Soc. London, **A354**, 59 (1977).
524. Davies P. C. W., Fulling S. A., Unruh W. G., Phys. Rev. D, **13**, 2720 (1976).
525. Deser S., Duff M. J., Isham C. J., Nucl. Phys. **B111**, 45 (1976).
526. Dowker J. S., Critchley R., Phys. Rev. D, **13**, 3224 (1976).
527. Dowker J. S., Critchley R., Phys. Rev. D, **16**, 3390 (1977).

528. *Duncan A.*, Phys. Lett., **66B**, 170 (1977).
529. *Duff M. J.*, Nucl. Phys., **B125**, 334 (1978).
530. *Eguchi T.*, *Freund P. G. O.*, Phys. Rev. Lett., **37**, 125 (1976).
531. *Fradkin E. S.*, *Vilkovisky G. A.*, Phys. Lett., **73B**, 209 (1978).
532. *Hawking S. W.*, Commun. Math. Phys., **55**, 133 (1977).
533. *Hu B. L.*, Phys. Rev. D, **18**, 4460 (1978).
534. *Hu B. L.*, Phys. Lett., **71A**, 169 (1979).
535. *Perry M. J.*, Nucl. Phys., **B143**, 114 (1978).
536. *Tsao H. S.*, Phys. Lett., **68B**, 79 (1977).
537. *Wald R. M.*, Commun. Math. Phys., **54**, 1 (1977).
538. *Wald R. M.*, Ann. Phys. (USA), **110**, 472 (1978).
539. *Wald R. M.*, Phys. Rev. D, **17**, 1477 (1978).
540. *Vilenkin A.*, Nuovo Cimento, **44A**, 441 (1978)

ПРОСТРАНСТВО де СИТТЕРА

541. *Adler S. L.*, Phys. Rev. D, **6**, 3445 (1972).
542. *Adler S. L.*, Phys. Rev. D, **8**, 2400 (1973).
543. *Birrell N. D.*, Proc. Roy. Soc. London, **A361**, 513 (1978).
544. *Birrell N. D.*, Journ. Phys. A: Gen. Phys., **12**, 337 (1979).
545. *Borner G.*, *Durr H. P.*, Nuovo Cimento, **64**, 669 (1969).
546. *Bunch T. S.*, *Davies P. C. W.*, Proc. Roy. Soc. London, **360**, 117 (1978).
547. *Candelas P.*, *Raine D. J.*, Phys. Rev. D, **12**, 965 (1975).
548. *Chernikov N. A.*, *Tagirov E. A.*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **9A**, 109 (1968).
549. *Dirac P. A. M.*, Ann. Math., **36**, 657 (1935).
550. *Dowker J. S.*, *Critchley R.*, Phys. Rev. D, **13**, 224 (1976).
551. *Dowker J. S.*, *Critchley R.*, Phys. Rev. D, **13**, 322 (1976).
552. *Drummond I. T.*, Nucl. Phys. **B94**, 115 (1975).
553. *Drummond I. T.*, *Shore G. M.*, Phys. Rev. D, **19**, 1134 (1979).
554. *Figari R.*, *Hoegh-Krohn R.*, *Nappi C.*, Commun. Math. Phys., **44**, 265 (1975).
555. *Fronsdal C.*, Rev. Mod. Phys., **37**, 221 (1965).
556. *Fronsdal C.*, Phys. Rev. D, **10**, 589 (1974).
557. *Fronsdal C.*, *Haugen R. B.*, Phys. Rev. D, **12**, 3810 (1975).
558. *Fulling S. A.*, Ph Thesis, Princeton University. 1972.
559. *Gehenian J.*, *Schomblond C.*, Acad. Roy. de Belgique, Bull. Cl. des Sciences, **54**, 1147 (1968).
560. *Gibbons G. W.*, *Hawking S. W.*, Phys. Rev. D, **15**, 2738 (1977).
561. *Grensing G.*, Journ. Phys. A: Gen. Phys., **10**, 1687 (1977).
562. *Lohiya D.*, Journ. Phys. A: Gen. Phys., **11**, 1335 (1978).
563. *Lohiya D.*, *Panchapakesan N.*, Journ. Phys. A: Gen. Phys., **11**, 1963 (1978).
564. *Lohiya D.*, *Panchapakesan N.*, Journ. Phys. A: Gen. Phys., **12**, 533 (1979).
565. *Nachtmann O.*, Commun. Math. Phys., **6**, 1 (1967).
566. *Rumpf H.*, Gen. Relativ. Gravit., **10**, 647 (1979).
567. *Schomblond C.*, *Spindel P.*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **25A**, 67 (1976).
568. *Shore G. M.*, Ann. Phys. (USA), **117**, 89 (1979).
569. *Shore G. M.*, Phys. Rev. D, **21**, 2226 (1980).
570. *Tagirov E. A.*, Ann. Phys. (USA), **76**, 561 (1973).

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

СУПЕРГРАВИТАЦИЯ

- 571*. *van Nieuwenhuizen P.* — Phys. Rep., 1981, v. 68C, p. 189.
- 572*. Supergravity'81. Lectures at 1981 Triest Sch. on Supergravity. Eds. Ferrara S., Taylor J. G. — Cambridge, 1982.

- 573*. Superspace and Supergravity. Eds. Hawking S. W., Roček M. — Cambridge, 1981.
- 574*. Quantum structure of space and time. Proc. of the Nuffield Workshop, 3—21 Aug. 1981. Eds. Duff M. J., Isham C. J. — Cambridge, 1982.
- 575*. Квантовая гравитация. (Труды II Межд. семинара по квантовой гравитации. Москва, 13—15 окт. 1981 г.). — М.: ИЯИ, 1983.

КВАДРАТИЧНЫЕ ТЕОРИИ

- 576*. *Julve J., Tonin M.* — Nuovo Cimento, 1978, vol. 46B, p. 137.
- 577*. *Salam A., Strathdee J.* — Phys. Rev., 1978, v. 18D, p. 4480.
- 578*. *Fradkin E. S., Tseytlin A. A.* — Phys. Lett., 1981, v. 104B, p. 377; 1982, v. 110B, p. 117.

ИНДУЦИРОВАННАЯ ГРАВИТАЦИЯ

- 579*. *Adler S.* — Phys. Rev. Lett., 1980, v. 44, p. 1567; Phys. Lett., 1980, v. 95B, p. 241; Rev. Mod. Phys., 1982, v. 54, p. 729.
- 580*. *Hasslacher B., Mottola E.* — Phys. Lett., 1980, v. 95B, p. 237; 1981, v. 99B, p. 221.
- 581*. *Khuri N. N.* — Phys. Rev. Lett., 1982, v. 49, p. 513.
- 582*. *Zee A.* — Phys. Rev. Lett., 1979, v. 42, p. 417; Phys. Rev., 1981, v. 23D, p. 858; Phys. Lett., 1982, p. 109B, p. 183.

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ КВАНТОВАНИЯ В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

- 583*. *Davies P. C. V., Fang J.* — Proc. Roy. Soc. Lond., 1982, v. 381A, p. 469.
- 584*. *Cecatto H., Foussats A., Giacomini H., Zandron O.* — Phys. Rev., 1981, v. 24D, p. 2576.
- 585*. *Ikuo Ichinose.* — Phys. Rev., 1982, v. 25D, p. 365.
- 586*. *Kay B. S.* — Lecture notes in Mathematics, 1982, v. 905, p. 272.
- 587*. *Martellini M.* — Nuovo Cimento, 1982, v. 67A, p. 305.
- 588*. *Харьков А. А.* — ЖЭТФ, 1981, т. 80, с. 19. Яд. физ., 1982, т. 35, с. 1350; Phys. Lett., 1982, v. 88A, p. 109.

ЭФФЕКТ КАЗИМИРА, ДВИЖУЩИЕСЯ ЗЕРКАЛА

- 589*. *Candelas P.* Confining the Aether. В книге: Quantum Electrodynamics of Strong Fields. Ed. Greiner W. — Nato Adv. Study Inst., 1983, v. 80B, p. 817.
- 590*. *Nugayev R. M.* — Phys. Lett., 1982, v. 91A, p. 216.
- 591*. *Ford L. H., Vilenkin A.*, Quantum radiation by moving mirrors, Tufts Univ. Preprint TUTP-82-1.
- 592*. *Walker W. R., Davies P. C. W.* — Journ. of Phys., 1982, v. 15A, p. 474.

ФУНКЦИИ ГРИНА

- 593*. *Beckenstein J. D., Parker L.* — Phys. Rev., 1981, v. 23D, p. 2850.
- 594*. *Galtsov D. V.* — Journ. of Phys., 1982, v. 15A, p. 3737.
- 595*. *Fulling S. A., Narcowich F. J., Wald R. M.* — Ann of Phys. (USA), 1981, v. 136, p. 243.
- 596*. *Gilkey P. B.* — Journ. Diff. geom., 1975, v. 10, p. 601.

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА И КВАНТОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЧЕРНЫХ ДЫРАХ

- 597*. *Bardeen J. H.* — Phys. Rev. Lett., 1981, v. 46, p. 382.
 598*. *Balbinot R., Bergamini R.* — Lett. Nuovo Cim., 1981, v. 30, p. 13.
 599*. *Candelas P., Chrzanowski P., Howard K. W.* — Phys. Rev., 1981, v. 24D, p. 297.
 600*. *Doigov A. D.* — Phys. Rev., 1981, v. 24D, p. 1042.
 601*. *Detweiler S.* — Phys. Rev., 1980, v. 22D, p. 2323.
 602*. *Fawcett M. S., Whiting B. F.*, Spontaneous symmetry breaking near a black hole, в книге Quantum structure of space and time, Cambridge, 1982.
 603*. *Гальцов Д. В., Померанцева Г. В., Чижев Г. А.* — Изв. высш. уч. зав., сер. физика, 1983, № 8, с. 75.
 604*. *Frolov V. P., Zelnikov A. I.* — Phys. Lett., 1982, v. 115B, p. 372.
 605*. *Gal'tsov D. V., Chizhov G. A., Pomerantseva G. V.* — Phys. Lett., 1984.
 606*. *Гаина А. Б., Чижев Г. А.* — Изв. высш. уч. зав., сер. физика, 1980, № 4, с. 120.
 607*. *Hiscock W. A.* — Phys. Rev., 1981, v. 23D, p. 2813; 2823.
 608*. *Hawking S. L.* — Comm. Math. Phys., 1981, v. 80, p. 421.
 609*. *Elster T.* — Journ. Phys., 1983, v. 16A, p. 985.
 610*. *Kojman L. A.* — Phys. Lett., 1982, v. 87A, p. 281.
 611*. *Page D.* — Phys. Rev., 1981, v. 25D, p. 1499; Gen. Rel. and Grav., 1981, v. 13, p. 1117.
 612*. *Piran Tsvi, Wald R. M.* — Phys. Lett., 1982, v. 80A, p. 9.
 613*. *Elster T.* — Phys. Lett., 1982, v. 89A, p. 125.
 614*. *Тернов И. М., Халилов В. Р., Чижев Г. А., Гаина А. Б.* — Изв. высш. уч. зав., сер. физика, 1978, № 9, с. 109.
 615*. *Тернов И. М., Гаина А. Б., Чижев Г. А.* — Изв. высш. уч. зав., сер. физика, 1980, № 8, с. 56.
 616*. *Zouros T., Eardley D. M.* — Ann. of Phys. (USA), 1979, v. 118, p. 139.

ТЕРМОДИНАМИКА

- 617*. *Curir A.* — Gen. Rev. and Grav., 1981, v. 13, p. 417.
 618*. *Гальцов Д. В.* Симметрия $SU(2, 1)$ уравнений Эйнштейна — Максвелла и термодинамика черных дыр в магнитном поле. В книге: Теоретико-групповые методы в физике. — М.: Наука, 1980, с. 183.
 619*. *Kasya M.* — Phys. Lett., 1982, v. 115B, p. 104.
 620*. *Magnon-Ashtekar A.* — Journ. Math. Phys., 1981, v. 22, p. 2012.
 621*. *Мамаев С. Г., Трунов Н. Н.* — Яд. физ., 1981, т. 34, с. 1142; Изв. высш. уч. зав., сер. физика, 1982, № 5, с. 82.
 622*. *Sciama D. W., Candelas P., Deutsch D.* — Adv. Phys., 1981, v. 30, p. 327.
 623*. *Unruh W., Wald R. M.* — Phys. Rev., 1982, v. 25D, p. 942.
 624*. *Wald R. M.* — Phys. Rev., 1979, v. 20D, p. 1271.
 625*. *Zannias T., Israel W.* — Phys. Lett., 1981, v. 86A, p. 82.

КВАНТОВЫЕ ЭФФЕКТЫ В КОСМОЛОГИИ

- 626*. *Бейлин В. А., Верешков Г. М., Гришкан Ю. С., Нестеренко В. А., Полтавцев Н. А.* — ЖЭТФ, 1980, т. 68, с. 2081.
 627*. *Верешков Г. М., Гришкан Ю. С., Иванов С. В., Нестеренко В. А., Полтавцев Н. А.* — ДАН СССР, 1976, т. 231, с. 578; ЖЭТФ, 1977, т. 73, с. 1985.
 628*. *Верешков Г. М., Гришкан Ю. С., Иванов С. В., Полтавцев Н. А.* — ЖЭТФ, 1981, т. 80, с. 1665.
 629*. *Гурович В. Ц., Старобинский А. А.* — ЖЭТФ, 1979, т. 77, с. 1683.

- 630*. Guth A. H. — Phys. Rev., 1981, v. 23D, p. 347.
 631*. Dolgov A. D., Zel'dovich Y. B. — Rev. Mod. Phys., 1981, v. 53, p. 1.
 632*. Зельдович Я. Б. — Письма в ЖЭТФ, 1981, т. 7, с. 579.
 633*. Horowitz G. T., Wald R. M. — Phys. Rev., 1982, v. 25D, с. 3408.
 634*. Муханов В. Ф., Чибисов Г. В. — Письма в ЖЭТФ, 1981, т. 33, с. 549.
 635*. Старобинский А. А. — Письма в ЖЭТФ, 1981, т. 34, с. 460.
 636*. Старобинский А. А. — Письма в ЖЭТФ, 1983, т. 37, с. 55.
 637*. Станюкович К. П., Мельников В. Н. Гидродинамика, поля и константы в теории гравитации. — М.: Энергоатомиздат, 1983, с. 256.
 638*. Пономарев В. Н., Барвинский А. О. — Теор. и мат. физ., 1978, т. 38, с. 224.

ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ ПОЛЯ В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

- 639*. Bunch T. S. — Gen. Rel. and Grav., 1981, v. 13, p. 711.
 640*. Bunch T. S. — Ann. Phys. (USA), 1981, v. 131, p. 118.
 641*. Gal'tsov D. V., Petukhov V. I. Quantum Electrodynamics in Plane Gravitational wave. GR-10 Abstracts, Padova 1983; Гальцов Д. В., Грац Ю. В., Петухов В. И. Излучение гравитационных волн электродинамическими системами. М.: изд. МГУ, 1984, гл. 7.
 642*. Долгов А. Д. — Письма в ЖЭТФ, 1980, т. 32, с. 673.
 643*. Denardo G., Spallucci E. — Lett. Nuovo Cim., 1982, v. 33, p. 336; 1982, v. 34, p. 284; Nuovo Cim., 1981, v. 64A, p. 27.
 644*. Drummond I. T., Hathrell S. J. — Phys. Rev., 1980, v. 22D, p. 342.
 645*. Isham C. J. — Phys. Lett., 1981, v. 102B, p. 251; Journ. Phys., 1981, v. 14A, p. 2943.
 646*. Hathrell S. J. — Ann. of Phys. (USA), 1982, v. 139, p. 136.
 647*. Nelson B. L., Panangaden P. — Phys. Rev., 1982, v. 25D, p. 1019.
 648*. Panangaden P. — Phys. Rev., 1981, v. 23D, p. 1735.
 649*. Parker L., Pimentel L. O. — Phys. Rev., 1982, v. 25D, p. 3180.
 650*. Spokoiny B. L. — Phys. Lett., 1982, v. 87A, p. 211.
 651*. Toms D. J. — Phys. Rev., 1982, v. 26D, p. 2713.

ГОЛЫЕ СИНГУЛЯРНОСТИ, КРУЧЕНИЕ

- 652*. Hiscock W. A., Williams L. G., Eardley D. M. — Phys. Rev., 1982, v. 26D, p. 751.
 653*. Ivanenko D. D., Sardanshvili G. A. — Lett. Nuovo Cim., 1981, v. 30, p. 220.
 654*. Nieh H. T., Yan M. L. — Ann. of Phys. (USA), 1982, v. 138, p. 237.
 655*. Парновский С. Л. — ЖЭТФ, 1981, т. 80, с. 1261; Gen. Rel. and Grav., 1981, v. 13, p. 853.
 656*. Пономарев В. Н., Пронин П. И. — Теор. и матем. физика, 1979, т. 39, с. 425.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адамара* функция 28, 29, 228, 229
 Адиабатическая регуляризация *см.*
 Регуляризация
 Адиабатические состояния 17, 43, 136
 Адиабатический вакуум 69, 76, 77,
 84, 135, 136, 144, 151
 — инвариант 72, 76
 — порядок 73—77, 82—85, 134, 135,
 151, 169, 170, 200, 204, 209, 215,
 232, 243, 256
 Адиабатическое выключение 57, 59,
 64, 112, 305
 — приближение 76
 — разложение 80—86, 95, 167, 200,
 215, 216
 Аксиально-векторная аномалия 185
 Аналитическое продолжение 137, 158,
 202, 203, 260
 Анизотропная космология 126, 149,
 251, 257, 258
 Аномалии *см.* Конформные аномалии,
 Аксиально-векторная аномалия
 Антикоммутаторы 26, 28, 40
 Антипериодические граничные усло-
 вия 98, 335. *См. также* Скручен-
 ные поля
- Белые дыры 48, 303
Бианки I пространства 149
 Би-вектор 205
 Бискаляр 204, 248
 Би-спинор 95
Боголюбова коэффициенты 52, 53,
 68, 76, 115—117, 153, 154, 260,
 263, 269, 314, 329
 — преобразования 52, 65, 115, 123,
 124, 133, 143, 240, 269, 313, 329,
 330
 Бозе статистика 21
 Бозоны 9, 273, 282
Больцмана постоянная 32
 Большой взрыв 133
- Вакуумное состояние 23
 — — адиабатическое определение 69—
 80, 132
 — — конформное 86—88, 132
 — — in- и out- 36, 260, 263
 Взаимодействующие поля 13, 14, 17,
 18, 273, 304—335
- Гамильтониан 21, 22, 26, 32, 312
 — диагонализация 80
Гаусса — *Боннэ* теорема 169
Гейзенберга представление 21, 313,
 328
 — соотношение неопределенностей 70
Гильберта пространство 21
 Глобальная гиперболичность 35, 43,
 50
 Горизонт событий 46, 48, 119, 120,
 145, 264, 265, 267, 274
 Гравитационная постоянная 161, 169,
 321
 Гравитация 9, 10, 159—161
 — квантовая *см.* Квантовая гравита-
 ция
 Гравитоны 10, 13, 89, 248, 272
 Границы 97, 105—110, 233—236, 309
Грина функции 18, 28—35, 80—84,
 102—104, 299, 300
 — — для взаимодействующих полей
 308—310
 — — тепловые (термодинамические)
 18, 33—35, 98, 99, 109, 148, 288
 — — усеченные 316
- Движущиеся зеркала 97, 110—117,
 240, 294
Де Витта — *Швингера* представление
 43, 83, 85, 164—166, 173, 177,
 181, 199
 — — разложение 95, 159, 178, 179,
 182, 200, 211, 243, 244, 246
Де Ситтера группа 51, 137, 140, 145,
 200

Де Ситтера пространство 126, 137—145, 147, 148, 194, 196, 200, 242, 291, 302, 320

Действие 12, 13, 19, 25, 26, 36, 38, 50, 93, 162, 163, 213, 214, 235, 300

— эффективное 158, 162, 165, 166, 192, 214, 233—235, 251, 252, 311, 319—325

Детекторы частиц 54—66, 293—295

Дирака матрицы 25, 91

— поле 26, 91

— уравнение 25, 93

Дираковски сопряженный спинор 25

Духовые поля 28, 40, 94, 179, 188

Импульс 21, 23, 26

Инстантоны 302

Интегралы по траекториям 18, 28, 35—41, 300, 301, 314

Казимира эффект 97, 109, 110, 334

Калибровочные преобразования 27, 38, 39

Квантовая гравитация 9—17, 225, 236, 283

— электродинамика (КЭД) 10, 12, 17

Квантовые черные дыры 261

Керра черная дыра 273

— Ньюмена черная дыра 285, 300

Киллинга векторы 49, 51—53, 121, 130, 137, 145, 147, 293, 300

Ковариантность общая 51

Коллапс звезды 46, 113, 261—275, 277, 292, 293

Коммутаторы 28, 34, 35

Коммутационные соотношения 20, 35, 50, 90, 290

Конформная инвариантность 69, 87, 89, 132, 181—197, 212, 325—327, 332

— связь (скалярного поля) 50, 56, 67, 131

Конформное время 66, 89, 133, 160

Конформно-плоское пространство-время 56, 69, 87, 89, 190—192

Конформно-тривиальная ситуация 69, 87, 189, 199, 246

Конформные аномалии 16, 95, 181—197, 245, 297

— диаграммы (Пенроуза) 42, 44—48, 120, 146, 268, 284, 298

— преобразования 42, 44, 45, 47, 87, 88, 118, 121, 125, 148, 149, 181—185

Конформный вакуум 43, 86—89, 145—148, 191, 209, 239

— вектор Киллинга 49, 87, 132, 147, 148, 196, 245

Космическая цензура 274, 303

Космологическая постоянная 12, 161, 169, 224, 321

Крускала координаты 46, 47, 280, 296

— многообразие 48, 49, 292

Лагранжиан для детектора частиц 57

— скалярного поля 19, 49, 93, 96, 107, 305, 317

— спинорного поля 25, 93, 96

— электромагнитного поля 26, 93, 94

— эффективный 165, 199, 217

Ландау калибровка 27, 39, 40

Лоренца группы представление 90—92, 187, 188

— преобразования 89—92, 137

ЛСЦ метод 308, 314

Максвелла уравнения 26

S-матрица 53, 305—307

Матрица плотности 33, 291, 292

Милна вселенная 122, 132, 133, 140, 152, 252

Минковского пространство 15, 16, 18—41, 44—47, 56, 89, 97—99

Нейтрино 89, 107

Нормальное упорядочение 12, 24, 226

Нормировка 19, 25, 50, 121, 127

Обратное воздействие (квантовых эффектов) 126, 149, 157, 225, 282, 283

— рассеяние 261, 270, 271, 278

Общая теория относительности 9, 11, 51

Однопетлевое приближение 11, 12, 161, 259

Оператор числа частиц 23, 32, 52

Паули — Вилларса регуляризация см. Регуляризация

Перенормировка 12—14, 24, 36, 43, 104, 135, 157—199, 203, 317

Плоское пространство-время 97

Причинность 226

Производящий функционал 36, 38, 101, 102, 309

Пуанкаре инвариантность 51, 55, 58, 137, 140, 308, 321

- Размерное продолжение 24, 158. *См. также* Регуляризация
- Расходимость 12, 13, 23, 99, 160
- Расходимость инфракрасная 103, 182
- поверхностная 106
- ультрафиолетовая 99, 182
- Регуляризация 17, 43, 81, 97, 157, 158
- адиабатическая 158, 216—219
- методом дзета-функции 172—175, 185, 189, 202
- Паули — Вилларса 219—222
- размерная 158, 219, 317
- Римана многообразие 300, 301
- Риндлера координаты 119, 121
- пространство 117—124, 132, 146—149
- Робертсона — Уокера вселенная 64, 66, 69, 71, 72, 126—130
- Рождение пар 272, 275, 285
- частиц 42, 56, 69—72
- — движущимися границами 97, 112, 113
- — черными дырами *см.* Черные дыры
- Сверхизлучение 274
- Скалярное поле 18, 19, 28, 49—51, 90
- — в искривленном пространстве 49—51, 87, 93
- произведение 19, 20, 26, 50, 65
- Скрученные поля 98, 101, 102, 203, 209, 335
- След тензора энергии-импульса 107, 200
- Спин 18, 25, 26, 89—95
- Спинорное поле 25, 30, 101, 102, 191
- Спиноры 25
- Статистическая сумма 32, 33, 301
- Супергравитация 9
- Термодинамика 256, 272, 274, 300
- Тирринга модель 332
- Томонага — Швингера уравнение 312
- Топология (нетривиальная) 97, 98, 118, 147, 148, 159
- Угловой момент 26, 90
- Уничтожения и рождения операторы 23—26, 99
- Ускоренный наблюдатель (детектор) 46, 48, 55, 59—62, 98, 117, 124, 125
- Фейнмана калибровка 27, 31
- пропагатор 28, 29, 31, 37
- Фермионы 9, 272, 298
- Фока базис 21
- Фонового поля метод 11
- Фотон 27, 89, 285
- Фридмана модель 78
- Функция отклика (детектора) 58, 62, 141, 294
- Хокинга теорема 286
- эффект 14, 15, 125, 331, 332. *См. также* Черные дыры
- Частицы в искривленном пространстве 42, 54, 55, 72
- Черные дыры 14, 47, 48, 98, 113, 256, 261—303
- — вечные 287—294
- — взрыв 283, 284
- — вращающиеся 273, 288, 299
- — заряженные 274, 275, 288, 298
- — излучение 271, 272, 282
- — испарение 240, 281—284
- — квантовые 261—303
- — сверхизлучение 274, 283, 285
- — температура 269, 274, 282
- — термодинамика 285, 286
- — энтропия 286, 287, 302
- Шварцшильда пространство-время 46, 262, 263, 280, 296
- Швингера вариационный принцип 163
- Эйлера — Пуанкаре характеристика 148
- Эйнштейна вселенная 56, 130, 131, 142, 194, 202, 203
- уравнения 11, 14, 46, 49, 161, 162, 198, 211, 283
- Электромагнитное поле 26—28, 38, 88, 93, 105, 109
- Энергии-импульса тензор 16, 18, 95, 135, 157, 198, 237
- Энергия 21—23
- вакуума 12, 13, 23, 24, 99, 101, 106
- отрицательная 100, 240, 241
- Энтропия 98, 110, 127
- в космологии 257, 258
- черной дыры 286, 287, 302
- Эффективное действие *см.* Действие
- Эффективный лагранжиан *см.* Лагранжиан

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|-----|
| Предисловие редактора перевода | 5 |
| Предисловие | 7 |
| Глава 1. ВВЕДЕНИЕ | 9 |
| Глава 2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ МИН- КОВСКОГО | 18 |
| 2.1. Скалярное поле | 18 |
| 2.2. Квантование | 20 |
| 2.3. Энергия и импульс | 21 |
| 2.4. Расходимость энергии вакуума | 23 |
| 2.5. Дираковское спинорное поле | 25 |
| 2.6. Электромагнитное поле | 26 |
| 2.7. Функции Грина | 28 |
| 2.8. Квантование методом интегрирования по траекториям | 35 |
| Глава 3. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТ- РАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ | 42 |
| 3.1. Структура пространства-времени | 43 |
| 3.2. Квантование скалярного поля | 49 |
| 3.3. Смысл понятия частиц: детекторы частиц | 54 |
| 3.4. Космологическое рождение частиц: простой пример | 66 |
| 3.5. Адиабатический вакуум | 69 |
| 3.6. Адиабатическое разложение функций Грина | 80 |
| 3.7. Конформный вакуум | 86 |
| 3.8. Поля произвольного спина в искривленном пространстве- времени | 89 |
| Глава 4. ПРИМЕРЫ ДЛЯ ПЛОСКОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ | 97 |
| 4.1. Двумерное цилиндрическое пространство-время | 98 |
| 4.2. Использование функций Грина | 102 |
| 4.3. Влияние границ | 105 |
| 4.4. Движущиеся зеркала | 110 |
| 4.5. Квантовая теория поля в пространстве Риндлера | 117 |
| Глава 5. ПРИМЕРЫ ДЛЯ ИСКРИВЛЕННОГО ПРОСТРАНСТВА- ВРЕМЕНИ | 126 |
| 5.1. Пространства Робертсона — Уокера | 127 |
| 5.2. Статические пространства Робертсона — Уокера | 130 |
| 5.3. Вселенная Милна | 132 |
| 5.4. Пространство де Ситтера | 137 |
| 5.5. Классификация состояний конформного вакуума | 145 |
| 5.6. Пространства типа Бианки I и теория возмущений | 149 |

| | |
|--|------------|
| Глава 6. ПЕРЕНОРМИРОВКА ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА . . . | 157 |
| 6.1. Основная проблема | 159 |
| 6.2. Перенормировка в эффективном действии | 166 |
| 6.3. Конформные аномалии и безмассовый случай | 181 |
| 6.4. Расчет перенормированного тензора энергии-импульса | 198 |
| 6.5. Другие методы регуляризации | 215 |
| 6.6. Физический смысл тензора энергии-импульса | 224 |
| Глава 7. ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ ПЕРЕНОРМИРОВОК | 237 |
| 7.1. Двумерные модели | 237 |
| 7.2. Модели Робертсона — Уокера | 244 |
| 7.3. Расчет тензора энергии-импульса методом теории возмуще- ний | 250 |
| 7.4. Приложения к космологии | 256 |
| Глава 8. КВАНТОВЫЕ ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ | 261 |
| 8.1. Рождение частиц коллапсирующим сферическим телом | 262 |
| 8.2. Физические аспекты испускания частиц черными дырами | 276 |
| 8.3. Вечные черные дыры | 287 |
| 8.4. Исследование тензора энергии-импульса | 295 |
| 8.5. Дальнейшее развитие теории | 299 |
| Глава 9. ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ ПОЛЯ | 304 |
| 9.1. Расчет матричных элементов S -матрицы | 304 |
| 9.2. Скалярное поле с самодействием в искривленном простран- стве-времени | 314 |
| 9.3. Рождение частиц за счет взаимодействия | 327 |
| 9.4. Другие эффекты взаимодействия | 331 |
| Литература | 336 |
| Предметный указатель | 352 |

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, изд-во «Мир».

Биррелл Н., Девис П.

КВАНТОВАННЫЕ ПОЛЯ В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Ст. научн. редактор Н. Телеснин
Мл. научн. редакторы Г. Сорокина, В. Цлаф
Художник Е. Волков Художественный редактор В. Шаповалов
Технический редактор И. Кренделева Корректор С. Денисова

ИБ № 3745

Сдано в набор 18.05.83. Подписано к печати 09.01.84.
Формат 60×90^{1/16}. Бумага типографская № 2. Бум. л. 11,25.
Гарнитура латинская. Печать высокая.
Усл. печ. л. 22,5. Усл. кр.-отт. 22,5. Уч.-изд. л. 21,89.
Изд. № 2/2715. Тираж 4400 экз. Зак. 674. Цена 3 р. 60 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

Издательство «МИР»
выпустит в 1985 г. книги:

Берке У. ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ, ГЕОМЕТРИЯ, КОСМОЛОГИЯ: Пер. с англ. — 24 л., ил. — 2 р.

Книга известного физика представляет собой учебное пособие по специальной и общей теории относительности. В отличие от существующей на русском языке литературы по этому предмету в книге Берке большее внимание уделяется геометрическим аспектам теории. Изложение ведется на языке современной дифференциальной геометрии (векторы как операторы, дифференциальные формы и т. д.). В книге 4 главы. Первая посвящена специальной теории относительности, под которой понимается геометрическая теория локальных свойств пространства-времени. Вторая, «Геометрия», имеет в основном математический характер (но включает также много физических примеров). Третья, «Гравитация», посвящена римановой геометрии и принципам общей теории относительности. Четвертая глава, «Космология», содержит обсуждение изотропных космологических моделей, фридмановских решений уравнений Эйнштейна, теории начальной стадии Вселенной, проблемы сингулярности начального состояния и т. д. По уровню изложения книга находится между «Пространством-временем» Уилера и «Гравитацией» Мизнера, Торна, Уилера.

Книга доступна студентам физических и математических специальностей младших курсов. Она также будет полезна всем желающим освоить современный геометрический язык общей теории относительности.

ВВЕДЕНИЕ В СУПЕРГРАВИТАЦИЮ: Пер с англ./Под ред. С. Феррары, и Дж. Тейлора. — 18 л., ил. — 2 р. 80 к.

Книга представляет собой первое систематическое изложение на русском языке основных идей и методов суперсимметрии и супергравитации. Она включает перевод семи лекций, прочитанных ведущими специалистами по актуальному направлению в квантовой теории поля — суперсимметрии и супергравитации (Стрэтди, Тейлор, Грисару, Ньювенхойцен, Дафф, Де Вит, Креммер) и опубликованных в книге «Супергравитация-81», выпущенной издательством «Кембридж Юниверсити Пресс» в 1982 г. После краткого введения в суперсимметрию обсуждается построение расширенных супералгебр, техника фейнмановских диаграмм на языке суперполей, формулировка расширенных супергравитационных теорий в пространствах с дополнительными размерностями, проблема ультрафиолетовых расходимостей, скрытые симметрии в расширенных супергравитационных моделях, суперконформная гравитация и другие вопросы. Книга подводит читателя к самому фронту ведущихся в настоящее время исследований.

Изложение доступно лицам, впервые знакомящимся с предметом, в том числе студентам-теоретикам старших курсов и аспирантам.

Хуанг К. КВАРКИ, ЛЕПТОНЫ И КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ: Пер. с англ.— 18 л., ил. — 2 р. 50 к.

Книга крупного американского физика-теоретика посвящена различным аспектам теории калибровочных полей. В ней мастерски изложены практически все важные вопросы теории полей Янга — Миллса: их квантование (как операторное, так и методом функционального интеграла), модель Вейнберга—Салама, перенормировки, метод эффективного потенциала, основы КХД, аксиальная аномалия, топологические решения. Часть вопросов впервые излагается в литературе на русском языке. Для чтения книги необходимо владеть основами теории квантованных полей. Изложение замкнутое, все важные выкладки приводятся подробно, что позволяет использовать книгу в качестве учебного пособия.

Для научных сотрудников, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области теоретической физики.

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Если Вы заинтересовались этими книгами, не забудьте оформить предварительные заказы на них. Наилучшее время оформления заказов май—июнь 1984 г. Именно в этот период поступит большинство заказов, которые по существу и определяют окончательный тираж книг.



1000



ИЗМЕНЕНИЯ ПОЛУЧЕННЫЕ ПОСЛЕДСТВИЕ-ВРЕМЯ